УДК 531.38

ПЕРЕМЕННЫЙ МАЯТНИК

С.В. Бутов

Рассматривается прикладная задача по теоретической механике. Задача сводится к созданию в замкнутой механической системе маятника переменной длины и массы. Результат решения задачи с помощью уравнений Лагранжа допускает возможность перемещения центра масс замкнутой механической системы за счет внутренних сил.

перемещение за счет внутренних сил, безопорное перемещение, уравнения Лагранжа, маятник

Рассмотрим следующую задачу (Рис. 1):

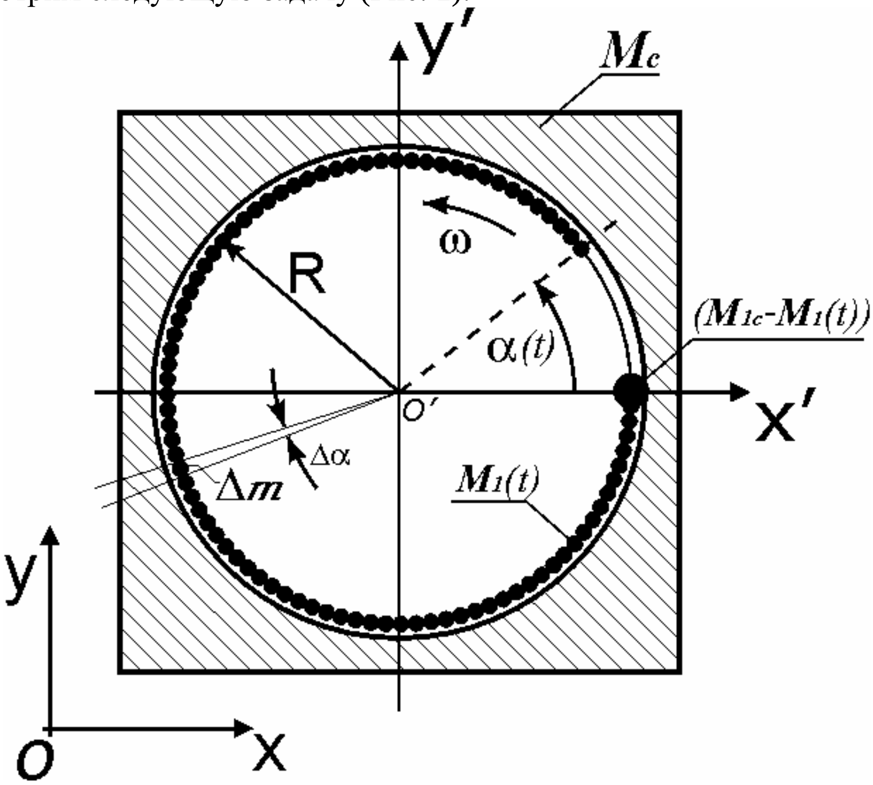

Рис. 1

Вокруг центра масс массивного тела M_c, по окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ перемещается с постоянной скоростью система тел суммарной массой M_{1c}. Система тел распределена непрерывно и равномерно. Траектория движения системы тел жестко связана с телом M_c.

Перемещение системы тел M_{1c} можно рассматривать, как вращение тела с массой M_{1c} с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{w}$ относительно некоторого центра. Предположим, для упрощения, что каждый элемент Δm имеет бесконечно малые геометрические размеры.

В определенный момент времени $t_0 = 0$ «цепочка» тел разрывается. Каждый элемент системы начинает останавливается в точке с координатами $\left[x'_{1end} = R, y'_{1end} = 0\right]$. Остановку отдельных элементов рассматриваем, как неупругий удар, после которого элементы приобретают скорость тела M_c. Остальные тела системы продолжают двигаться до полного останова, т.е., до угла раскрыва $\alpha(t) = 2\pi$.

Под углом раскрыва $\alpha(t)$, в данном случае, будем понимать угол, отсчитываемый от оси $O'X'$ до замыкающего элемента системы тел.

В начальный момент времени $(t = 0)$: $\alpha_{start} = 0$ (для данной задачи).

Угол раскрыва изменяется от 0 до 2π:

$$\alpha(t) = \int w\,dt \quad \text{, при} \quad 0 \le \alpha(t) \le 2\pi \qquad \textbf{(1)}$$

Время, за которое угол раскрыва меняется от 0 до 2π, назовем рабочим периодом, или рабочим циклом.

$$0 \le \alpha(t) \le 2\pi \quad \text{, при} \quad 0 \le t \le \left(2\pi / w\right)$$

В каждый момент времени, в течение рабочего периода, на траектории перемещается система подвижных элементов суммарной массой M_1. Значение M_1 изменяется линейно:

$$M_1(t) = \frac{M_{1c}\,(2\pi - \alpha(t))}{2\pi} \qquad \textbf{(2)}$$

, где величина $(2\pi - \alpha\,(t))$ определяет угол на траектории, заполненной движущимися элементами.

Будем считать, что вся механическая система имеет две степени свободы (перемещение по осям X и Y). Примем условие, что существует ограничение поворота всей системы.

Построим две системы координат: неподвижную XOY (абсолютная система координат) и подвижную $X'O'Y'$, связанную с центром масс тела M_c и с центром траектории подвижных элементов.

Как известно, центром масс материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор r_{cm} которой определяется равенством:

$$r_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{m} m_k\, r_k \qquad \textbf{(3)}$$

В случае представленной задачи, центр масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ вычисляется, в соответствии с (3):

$$x_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i' \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i , y_i –координаты i-го элементарного участка массой m_i .

Координаты i-го подвижного элемента в системе координат $X'O'Y'$:

$$x_i' = R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)$$
$$y_i' = R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

Из условий представленной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M_1\left(t\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \, m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\rho \, \Delta\alpha\right) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' \, m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i' \left(\rho \, \Delta\alpha\right) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

,где ρ — угловая плотность распределения элементов системы подвижных элементов по окружности (дуге окружности).

$$\rho = \frac{M_{1c}}{2\pi}$$

Координаты центра масс подвижных элементов в выбранной системе координат вычисляются с помощью интегралов с переменным нижним пределом:

$$x_1' = \frac{1}{M_1\left(t\right)} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

$$y_1' = \frac{1}{M_1\left(t\right)} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

После интегрирования получим:

$$x_1\left(t\right) = -\frac{R\sin(\alpha\left(t\right))}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \qquad \textbf{(4)}$$

$$y_1\left(t\right) = \frac{R\left(1 - \cos(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \qquad \textbf{(5)}$$

Выражения (4) и (5) определяют координаты центра масс подвижных элементов в зависимости от угла раскрыва $\alpha(t)$.

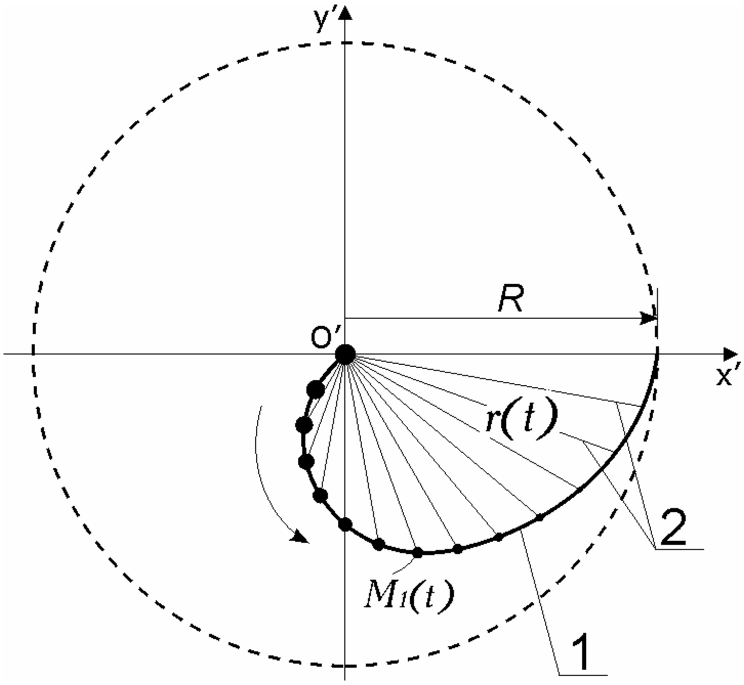

Рис. 2

На Рис. 2 представлен график изменения координат центра масс системы подвижных элементов $x_1(t)$ и $y_1(t)$ в системе координат $X'O'Y'$ (кривая 1 на рисунке).

Перемещение центра масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ можно представить в виде движения маятника переменной длины $r(t)$ и переменной массы $M_1(t)$.

На Рис. 2 показано условное изменение положения такого маятника (линии 2 на рисунке).

Уравнения движения данной механической системы можно составить с помощью уравнений Лагранжа II рода.

Для голономных систем уравнения Лагранжа в общем случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2..,n)$$

где q_i — обобщённые координаты, число которых равно числу n степеней свободы системы, $\dot{q}_i$ — обобщённые скорости, Q_i — обобщённые силы, T — кинетическая энергия системы, выраженная через q_i и $\dot{q}_i$.

Для системы, изображенной на Рис. 1, за обобщенные координаты можно принять координаты центра масс тела M_c.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии тела M_c, к которому за рабочий период присоединяются частицы, и кинетической энергии системы подвижных элементов переменной массы $M_1(t)$.

$$T = T_0 + T_1$$

Кинетическая энергия тела M_c, к которому за рабочий период присоединяются частицы системы подвижных элементов:

$$T_0 = \frac{M_0\left(V^2{}_{cx} + V^2{}_{cy}\right)}{2},$$ где

$$M_0 = M_c + \left(M_{1c} - M_1(t)\right)$$

$$V_{cx} = \frac{d}{dt}x_c(t)$$

$$V_{cy} = \frac{d}{dt}y_c(t)$$

Кинетическая энергия системы подвижных элементов складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и вращательного относительно центра масс.

$$T_1 = \frac{M_1 V^2{}_1}{2} + \frac{I_c w^2}{2}$$

$$T_1 = \frac{M_{1c}\left(2\pi - wt\right)\left(\left(V_{cx} + V_{x1}\right)^2 + \left(V_{cy} + V_{y1}\right)^2\right)}{4\pi} + \frac{I_c\, w^2}{2}$$

Скорость центра масс системы подвижных элементов складывается из собственной скорости V_1 и переносной V_c.

$(V_{cx} + V_{x1})$ и $(V_{cy} + V_{y1})$ — соответственно проекции скорости центра масс системы подвижных элементов на оси OX и OY.

I_c — момент инерции системы подвижных элементов относительно центра масс системы.

$$\frac{\partial}{\partial V_{cx}}T = M_0\, V_{cx} + \frac{M_{1c}\left(2\pi - wt\right)\left(2V_{cx} + 2V_{x1}\right)}{4\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial V_{cy}}T = M_0\, V_{cy} + \frac{M_{1c}\left(2\pi - wt\right)\left(2V_{cy} + 2V_{y1}\right)}{4\pi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial V_{cx}}T\right)=\frac{1}{8}\left(\begin{array}{l}32\pi^2\left(\pi-\frac{wt}{2}\right)^2\left(M_c+M_{1c}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}x_c(t)\right)+\\+16Rw^2\left(\begin{array}{l}\left(\frac{1}{4}w^2\pi t^2-w\pi^2 t-\frac{1}{4}\pi+\pi^3\right)\sin(wt)-\\-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{wt}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cos(wt)-\frac{wt}{4}\right)\end{array}\right)M_{1c}\end{array}\right)/\left(\left(2\pi-wt\right)^2\pi^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial V_{cy}}T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}2\pi\left(wt-2\pi\right)^2\left(M_c+M_{1c}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}y_c(t)\right)+\\+M_{1c}w^2\left(\begin{array}{l}\left(4\pi wt-w^2t^2-4\pi^2+1\right)\cos(wt)-\\-1+\left(wt-2\pi\right)\sin(wt)\end{array}\right)R\end{array}\right)/\left(\pi\left(wt-2\pi\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_c}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_c}=0$$

По условию задачи, на представленную механическую систему не действуют внешние силы. Поэтому:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial V_{cx}}T\right)+\frac{\partial T}{\partial x_c}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial V_{cy}}T\right)+\frac{\partial T}{\partial y_c}=0 \qquad \textbf{(7)}$$

Решение системы дифференциальных уравнений второго порядка (6), (7) относительно $x_c(t)$ и $y_c(t)$, с учетом начальных условий:

$$x_c(0)=0$$

$$y_c(0)=0$$

$$\frac{d}{dt}x_c(0)=0$$

$$\frac{d}{dt}y_c(0)=0$$

дает следующие результаты:

$$x_c(t) = \frac{1}{2}\frac{M_{1c}\ R\left(\sin(wt) - Si(wt - 2\pi) - wt - Si(2\pi)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)}$$

$$y_c(t) = \frac{1}{2}\frac{M_{1c}\ R\left(\ln(wt - 2\pi) + \cos(wt) - Ci(wt - 2\pi) - \ln(2) - \ln(\pi) - 1 + Ci(-2\pi)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)}$$

, где: Si – синусный интеграл: $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

Ci – косинусный интеграл: $Ci(x) = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t}\,dt$

γ — константа Эйлера: $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) - \ln(n) \approx 0.5772156649...$

По завершении рабочего цикла, центр масс тела M_c переместится на некоторое расстояние $x_{c\max}$ и $y_{c\max}$. Величины $x_{c\max}$ и $y_{c\max}$ можно найти следующим образом:

$$x_{c\max} = \lim_{t\to\frac{2\pi}{w}} x_c(t) = -\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Si(2\pi) + 2\pi\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)} \quad \textbf{(8)}$$

$$y_{c\max} = \lim_{t\to\frac{2\pi}{w}} y_c(t) = \frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(\gamma - Ci(-2\pi) + \ln(\pi) + \ln(2)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)} \quad \textbf{(9)}$$

Можно определить перемещение центра масс всей системы за рабочий период:

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Si(wt - 2\pi) + Si(2\pi)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)} \quad \textbf{(10)}$$

$$y_0(t) = \frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Ci(wt - 2\pi) - Ci(-2\pi) - \ln(wt - 2\pi) + \ln(\pi) + \ln(2)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)} \quad \textbf{(11)}$$

Координаты положения центра масс всей системы по окончании рабочего цикла:

$$x_{0\max} = \lim_{t\to\frac{2\pi}{w}} x_0(t) = -\frac{1}{2}\frac{M_{1c}\ R\ Si(2\pi)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)}$$

$$y_{c\max} = \lim_{t \to \frac{2\pi}{w}} y_{\mathrm{c}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2} \frac{M_{1c} R\left(\gamma - Ci\left(-2\pi\right) + \ln\left(\pi\right) + \ln\left(2\right)\right)}{\pi\left(M_c + M_{1c}\right)}$$

На Рис. 3 представлены графики перемещения центров масс: тела M_c (кривая 1 на Рис. 3) и всей системы (кривая 2 на Рис. 3), за рабочий период.

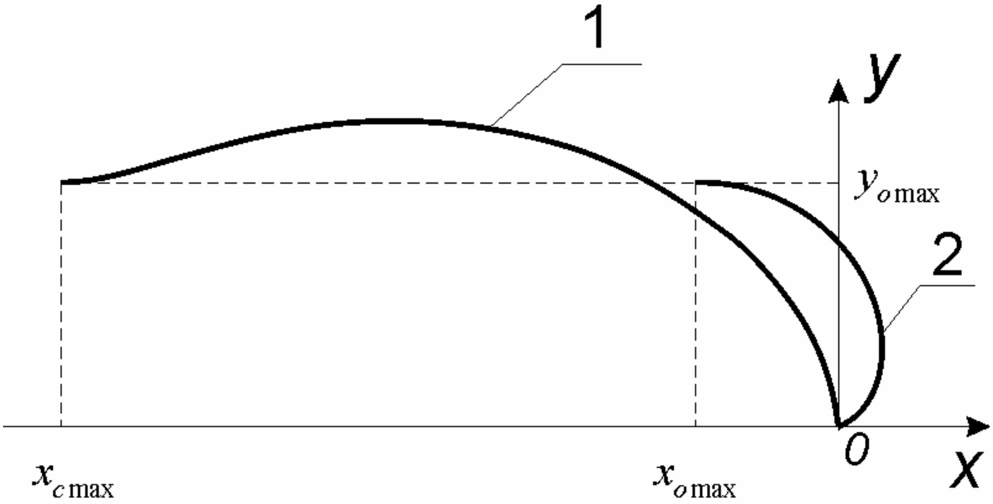

Рис. 3

Анализ движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа показывает возможность перемещения замкнутой механической системы без внешнего воздействия.

Предлагается назвать представленную механическую систему «Varipend» («Варипенд»). Название образовано от слияния двух слов: «variable» + «pendulum» («переменный маятник»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб., 1998. – 736 с.

VARIABLE PENDULUM

S.V.Butov

The applied task on the theoretical mechanics is considered. The task is reduced to creation in the closed mechanical system of a pendulum of variable length and mass. The result of the decision of a task by means of Lagrange's equations supposes an opportunity of moving of the center of mass of the closed mechanical system due to internal forces.