УДК 531.38

О ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЗА СЧЕТ ВНУТРЕННИХ СИЛ

С.В. Бутов

Рассматривается теоретическое обоснование возможности перемещения замкнутой механической системы за счет перераспределения импульсов между компонентами механической системы. Результат решения прикладной задачи по теоретической механике допускает возможность перемещения центра масс замкнутой механической системы, на которую не действуют внешние силы, при нулевой начальной скорости.

закон сохранения импульса, перемещение за счет внутренних сил.

Для замкнутой системы, т. е. системы, не испытывающей внешних воздействий, или в случае, когда геометрическая сумма действующих на систему внешних сил равна нулю, имеет место закон сохранения количества движения. При этом количество движения отдельных частей системы (например, под действием внутренних сил) могут изменяться, но так, что величина $\mathrm{Q} = \sum \mathrm{m_k v_k}$ остаётся постоянной.

Рассмотрим следующую задачу (**Рис. 1**):

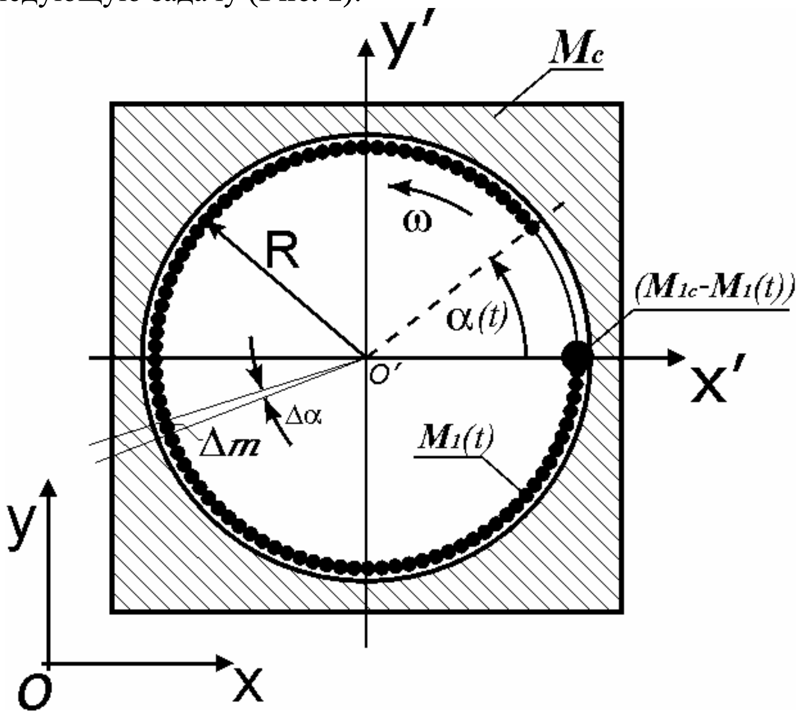

Рис. 1

Вокруг центра масс массивного тела M_c, по окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ перемещается с постоянной скоростью система тел суммарной массой M_{1c}. Система тел распределена непрерывно и равномерно. Траектория движения системы тел жестко связана с телом M_c.

Перемещение системы тел M_{1c} можно рассматривать, как вращение тела с массой M_{1c} с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{w}$ относительно некоторого центра. Предположим, для упрощения, что каждый элемент Δm имеет бесконечно малые геометрические размеры.

В определенный момент времени $t_0 = 0$ «цепочка» тел разрывается. Каждый элемент системы начинает останавливается в точке с координатами $\left[x'_{1end} = R, y'_{1end} = 0\right]$. Остановку отдельных элементов рассматриваем, как неупругий удар, после которого элементы приобретают скорость тела M_c. Остальные тела системы продолжают двигаться до полного останова, т.е., до угла раскрыва $\alpha(t) = 2\pi$.

Под углом раскрыва $\alpha\left(t\right)$, в данном случае, будем понимать угол, отсчитываемый от оси $O'X'$ до замыкающего элемента системы тел.

В начальный момент времени $\left(t=0\right)$: $\alpha_{start} = 0$ (для данной задачи).

Угол раскрыва изменяется от 0 до 2π:

$$\alpha(t) = \int w\,dt \quad \textbf{, при} \quad 0 \le \alpha(t) \le 2\pi \tag{1}$$

Время, за которое угол раскрыва меняется от 0 до 2π, назовем рабочим периодом, или рабочим циклом.

$$0 \le \alpha(t) \le 2\pi \quad \text{, при} \quad 0 \le t \le \left(2\pi / w\right) \tag{2}$$

В каждый момент времени, в течение рабочего периода, на траектории перемещается система подвижных элементов суммарной массой M_1. Значение M_1 изменяется линейно:

$$M_1(t) = \frac{M_{1c}\,(2\pi - \alpha(t))}{2\pi}$$

, где величина $(2\pi - \alpha\,(t))$ определяет угол на траектории, заполненной движущимися элементами.

Будем считать, что вся механическая система имеет две степени свободы (перемещение по осям X и Y). Примем условие, что существует ограничение поворота всей системы.

Построим две системы координат: неподвижную XOY (абсолютная система координат) и подвижную $X'O'Y'$, связанную с центром масс тела M_c и с центром траектории подвижных элементов.

Как известно, центром масс материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор r_{cm} которой определяется равенством:

$$r_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{m} m_k\, r_k \tag{3}$$

Для условий представленной задачи, соответствующие проекции координат центра масс всей системы на оси системы координат XOY, будут определяться, как:

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_k\, x_k}{\left(M_c + M_{1c}\right)} = \frac{M_c x_c\left(t\right) + \left(M_{1c} - M_1\left(t\right)\right)\left(x_c\left(t\right) + R\right) + M_1\left(t\right)\left(x_c\left(t\right) + x_1\left(t\right)\right)}{\left(M_c + M_{1c}\right)} \tag{4}$$

$$y_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_k\, y_k}{\left(M_c + M_{1c}\right)} = \frac{M_c y_c\left(t\right) + \left(M_{1c} - M_1\left(t\right)\right) y_c\left(t\right) + M_1\left(t\right)\left(y_c\left(t\right) + y_1\left(t\right)\right)}{\left(M_c + M_{1c}\right)} \tag{5}$$

, где: $x_c(t)$, $y_c(t)$ - координаты центра масс тела M_c

$x_1(t)$, $y_1(t)$ - координаты центра масс системы подвижных элементов $M_1(t)$ в подвижной системе координат $X'O'Y'$.

Количество движения системы, или импульс, определяется, как произведение массы всей системы, умноженной на скорость ее центра масс:

$$Q = M \frac{dr_{cm}}{dt} \tag{6}$$

В рассматриваемой задаче, масса всей системы $M = M_c + M_{1c}$

Продифференцировав выражения (4), (5) и подставив в (6), с учетом (2), получим:

$$Q_x = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d\,x_c(t)}{dt} + \left(x_1(t) - R\right)\frac{d\,M_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d\,x_1(t)}{dt} \tag{7}$$

$$Q_y = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d\,y_c(t)}{dt} + y_1(t)\frac{d\,M_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d\,y_1(t)}{dt} \tag{8}$$

В соответствии с законом сохранения количества движения:

$$Q_x = 0$$

$$Q_y = 0$$

В общем случае, количество движения системы представляет собой сумму импульсов элементов системы.

В данном случае, можно записать:

$$Q_x = Q_{cx}(t) + Q_{1x}(t) \tag{9}$$

$$Q_y = Q_{cy}(t) + Q_{1y}(t) \tag{10}$$

, где: $Q_{cx}(t)$, $Q_{cy}(t)$ - соответствующие проекции импульса тела M_c с присоединяющимися частицами.

$Q_{1x}(t)$, $Q_{1y}(t)$ - проекции импульса системы подвижных элементов.

При неизменности импульса всей системы, импульсы компонентов системы имеют переменные значения, поскольку массы компонентов системы изменяются с течением времени.

Количество движения системы подвижных элементов можно представить как сумму элементарных импульсов: $Q_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$

Но в точке $\left[x'_{1end} = R, y'_{1end} = 0\right]$ один из этих элементов, обладающий импульсом $\Delta m_i\, v_i$ «теряет» его, отдавая телу M_c.

Частица, «теряющая» свой импульс, обладает линейной скоростью $u = w\,R$.

Существует теорема об изменении количества движения тела переменной массы.

$$\frac{dQ}{dt} = F^e - \frac{dm_1}{dt}u_1 + \frac{dm_2}{dt}u_2 \tag{11}$$

где: F^e - главный вектор всех внешних сил, действующих на тело;

$\frac{dm_1}{dt}, \frac{dm_2}{dt}$ - скорости изменения массы;

u_1, u_2 - скорости центров масс соответственно отделяющихся и присоединяющихся частиц.

Используя уравнение Мещерского для системы подвижных элементов, «теряющей» частицы, мы можем записать:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dm}{dt}(u - V_1) \tag{12}$$

,где: $(u - V_1)$ — относительная скорость отсоединяющихся частиц.
(«Абсолютная» скорость отсоединяющихся частиц: $(V_c + u)$);
V_1 - скорость центра масс системы подвижных элементов;
V_c - скорость центра масс тела M_c.

Для тела M_c с присоединяющимися частицами $\left(M_{1c} - M_1(t)\right)$ можно записать:

$$\frac{d\,Q_c}{dt} = +\frac{dm}{dt}u \tag{13}$$

,где: u — относительная скорость присоединяющихся частиц («Абсолютная» скорость отсоединяющихся частиц: $(V_c + u)$)

Дифференцируя выражения (7),(8), и используя выражения (12),(13), получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d^2x_c}{dt^2} + 2\frac{d\left(x_1 - R\right)}{dt}\frac{dM_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d^2x_1}{dt^2} = +\frac{dm}{dt}u - \frac{dm}{dt}(u - \frac{dx_1}{dt}) \tag{14}$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d^2y_c}{dt^2} + 2\frac{dy_1}{dt}\frac{dM_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d^2y_1}{dt^2} = +\frac{dm}{dt}u - \frac{dm}{dt}(u - \frac{dy_1}{dt}) \tag{15}$$

Выражения (16) и (17) получены, считая мгновенный расход и приход масс элементов системы величиной постоянной: $\frac{dM}{dt} = const$, $\frac{d^2M}{dt^2} = 0$

После упрощения и решения уравнений (14) и (15):

$$Q_x = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{dx_c(t)}{dt} - R\frac{dM_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \tag{16}$$

podrobno.pdf

$$Q_y = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{dy_c(t)}{dt} + M_1(t)\frac{dy_1(t)}{dt} = 0 \tag{17}$$

Выражения (16) и (17) представляют собой условие выполнение закона сохранения импульса для данной конкретной задачи, представленной на Рис. 1.

В случае представленной задачи, центр масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ вычисляется, в соответствии с (3):

$$x_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i' \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

где x_i , y_i –координаты i-го элементарного участка массой m_i .

Координаты i-го подвижного элемента в системе координат $X'O'Y'$:

$$x_i' = R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

$$y_i' = R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)$$

Из условий представленной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M_1\left(t\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \, m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\rho \, \Delta\alpha\right) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' \, m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i' \left(\rho \, \Delta\alpha\right) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

,где ρ — угловая плотность распределения элементов системы подвижных элементов по окружности (дуге окружности).

$$\rho = \frac{M_{1c}}{2\pi}$$

Координаты центра масс подвижных элементов в выбранной системе координат вычисляются с помощью интегралов с переменным нижним пределом:

$$x_1' = \frac{1}{M_1\left(t\right)} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\cos\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

$$y_1' = \frac{1}{M_1\left(t\right)} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1\left(t\right) R\sin\left(\alpha\left(t\right)\right)}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \partial\alpha$$

После интегрирования получим:

$$x_1\left(t\right) = -\frac{R\sin(\alpha\left(t\right))}{2\pi - \alpha\left(t\right)} \qquad (18)$$

$$y_1(t)=\frac{R\left(1-\cos(\alpha(t))\right)}{2\pi-\alpha(t)} \tag{19}$$

Выражения (18) и (19) определяют координаты центра масс подвижных элементов в зависимости от угла раскрыва $\alpha(t)$. Из условия задачи угол раскрыва изменяется линейно с течением времени (1).

Используя выражения (18) и (19), можно решить систему уравнений (16),(17) относительно координат центра масс тела M_c: $x_c(t)$ и $y_c(t)$. С учетом начальных условий: $x_c(0)=0$ и $y_c(0)=0$.

$$x_c(t)=-\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(wt+Si(wt-2\pi)-\sin(wt)+Si(2\pi)\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{20}$$

$$y_c(t)=-\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(\ln(wt-2\pi)-Ci(wt-2\pi)+Ci(2\pi)-1-\ln(2)-\ln(\pi)+\cos(wt)\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{21}$$

, где: Si – синусный интеграл: $Si(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

Ci – косинусный интеграл: $Ci(x)=\gamma+\ln(x)+\int\limits_0^x \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt$

γ — константа Эйлера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-\ln(n)\approx 0.5772156649...$

По завершении рабочего цикла, центр масс тела M_c переместится на некоторое расстояние $x_{c\max}$ и $y_{c\max}$. Величины $x_{c\max}$ и $y_{c\max}$ можно найти следующим образом:

$$x_{c\max}=\lim_{t\to\frac{2\pi}{w}} x_{\mathrm{c}}(\mathrm{t})=-\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Si(2\pi)+2\pi\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{22}$$

$$y_{c\max}=\lim_{t\to\frac{2\pi}{w}} y_{\mathrm{c}}(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(\gamma-Ci(2\pi)+\ln(\pi)+\ln(2)\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{23}$$

Подставив значения (20),(21) в выражения (4),(5), можно определить перемещение центра масс всей системы за рабочий период:

$$x_0(t)=-\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Si(wt-2\pi)+Si(2\pi)\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{24}$$

$$y_0(t)=\frac{1}{2}\frac{M_{1c}R\left(Ci(wt-2\pi)-Ci(2\pi)-\ln(wt-2\pi)+\ln(\pi)+\ln(2)\right)}{\pi(M_c+M_{1c})} \tag{25}$$

Координаты положения центра масс всей системы по окончании рабочего цикла:

$$x_{0\max} = \lim_{t \to \frac{2\pi}{w}} x_0(\mathrm{t}) = -\frac{1}{2}\frac{M_{1c} R\, Si(2\pi)}{\pi(M_c + M_{1c})}$$

$$y_{c\max} = \lim_{t \to \frac{2\pi}{w}} y_{\mathrm{c}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\frac{M_{1c} R(\gamma + \ln(\pi) - Ci(2\pi) + \ln(2))}{\pi(M_c + M_{1c})}$$

На Рис. 2 представлены графики перемещения центров масс: тела M_c (кривая 1 на рис.) и всей системы (кривая 2 на рис.), за рабочий период.

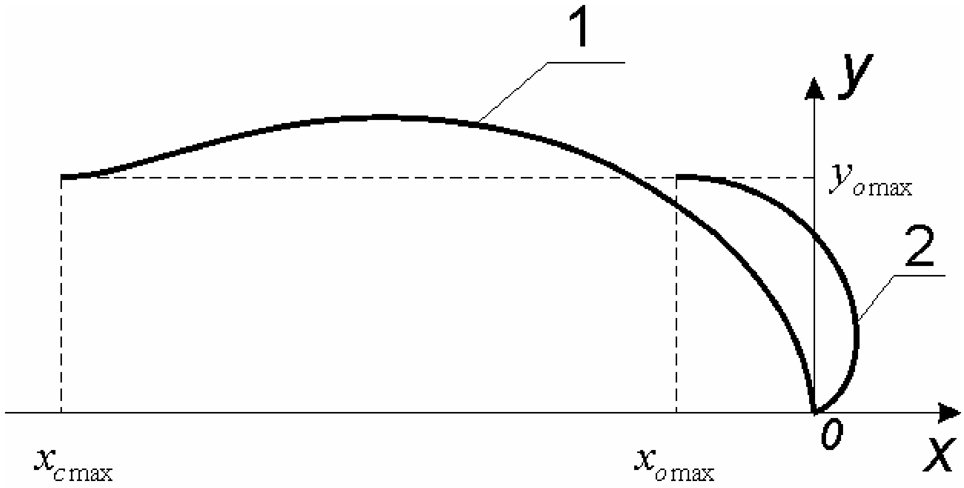

Рис. 2

В процессе перемещения всей системы закон сохранения импульса не нарушается. На Рис. 3 представлены графики изменения количества движения компонентов системы в проекции на ось Y системы координат XOY .

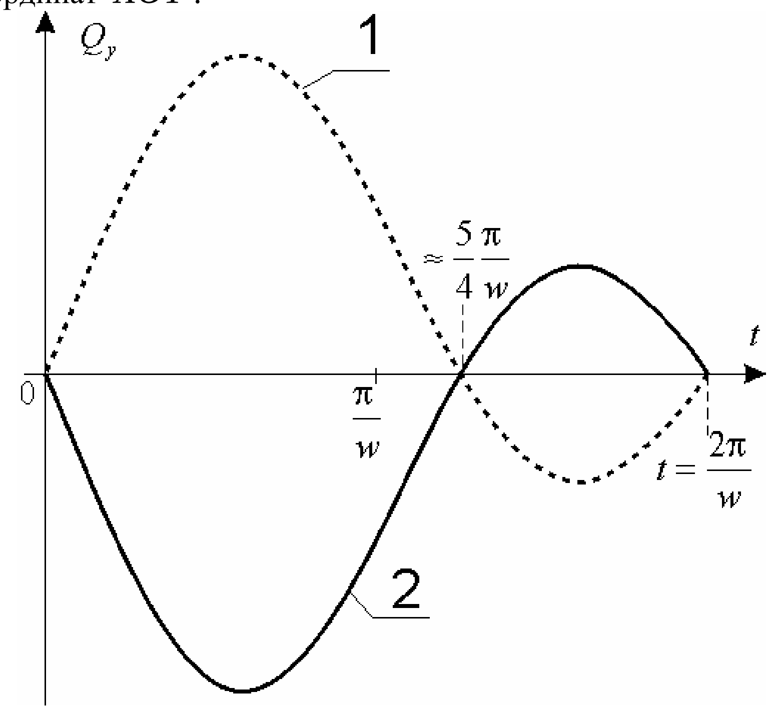

Рис. 3

Кривая 1 представляет собой график функции $Q_{cy}(t)$ - импульс тела M_c с присоединяющимися частицами (формула (10)).

Кривая 2 представляет собой график функции $Q_{1y}\left(t\right)$ - импульс системы подвижных элементов M_1 (формула (10)).

Если в любой момент времени остановить перемещение системы подвижных элементов относительно тела M_c, вся механическая система, изображенная на Рис. 1, будет иметь начальную скорость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб., 1998. – 736 с.

ABOUT THE OPPORTUNITY OF MOVING OF THE CLOSED MECHANICAL SYSTEM DUE TO INTERNAL FORCES

S.V.Butov

The theoretical substantiation of an opportunity of moving of the closed mechanical system due to redistribution of momentums between components of mechanical system is considered. The result of the decision of an applied task on the theoretical mechanics supposes an opportunity of moving of the center of mass of the closed mechanical system on which external forces do not operate, at zero initial speed.