

О возможности перемещения замкнутой механической системы за счет работы внутренних сил.

Оглавление:

1. Постановка задачи	2
2. Анализ движения замкнутой механической системы	3
2.1.. Расчет количества движения системы подвижных элементов в относительной системе координат.....	3
2.2.. Расчет количества движения замкнутой механической системы тел в абсолютной системе координат за рабочий период.....	7
3. Анализ движения механической системы (Рис. 1) с помощью уравнений Лагранжа II рода.....	14
4. Выводы	18
4.1.. Расчет силы, развиваемой системой подвижных элементов.....	21
4.2.. Работа силы и мощность.....	23
5. Групповая работа. Объединение нескольких систем подвижных элементов.....	24
6. Организация непрерывной (квазинепрерывной) работы.....	27
6.1.. Группа СЭ с фазовым сдвигом, равным нулю.....	27
6.2.. Группа СЭ с фазовым сдвигом, отличным от нуля.....	28
7. Силовые элементы с нарастающей массой подвижных элементов.....	35
8. Материалы для систем подвижных элементов.....	36
9. Восстановление силовых элементов в рабочее состояние.....	37
10. Практическое применение.....	40

1. Постановка задачи

Для замкнутой системы, т. е. системы, не испытывающей внешних воздействий, или в случае, когда геометрическая сумма действующих на систему внешних сил равна нулю, имеет место закон сохранения количества движения. При этом количество движения отдельных частей системы (например, под действием внутренних сил) могут изменяться, но так, что величина $Q = \sum m_k v_k$ остаётся постоянной.

Рассмотрим следующую задачу (Рис. 1):

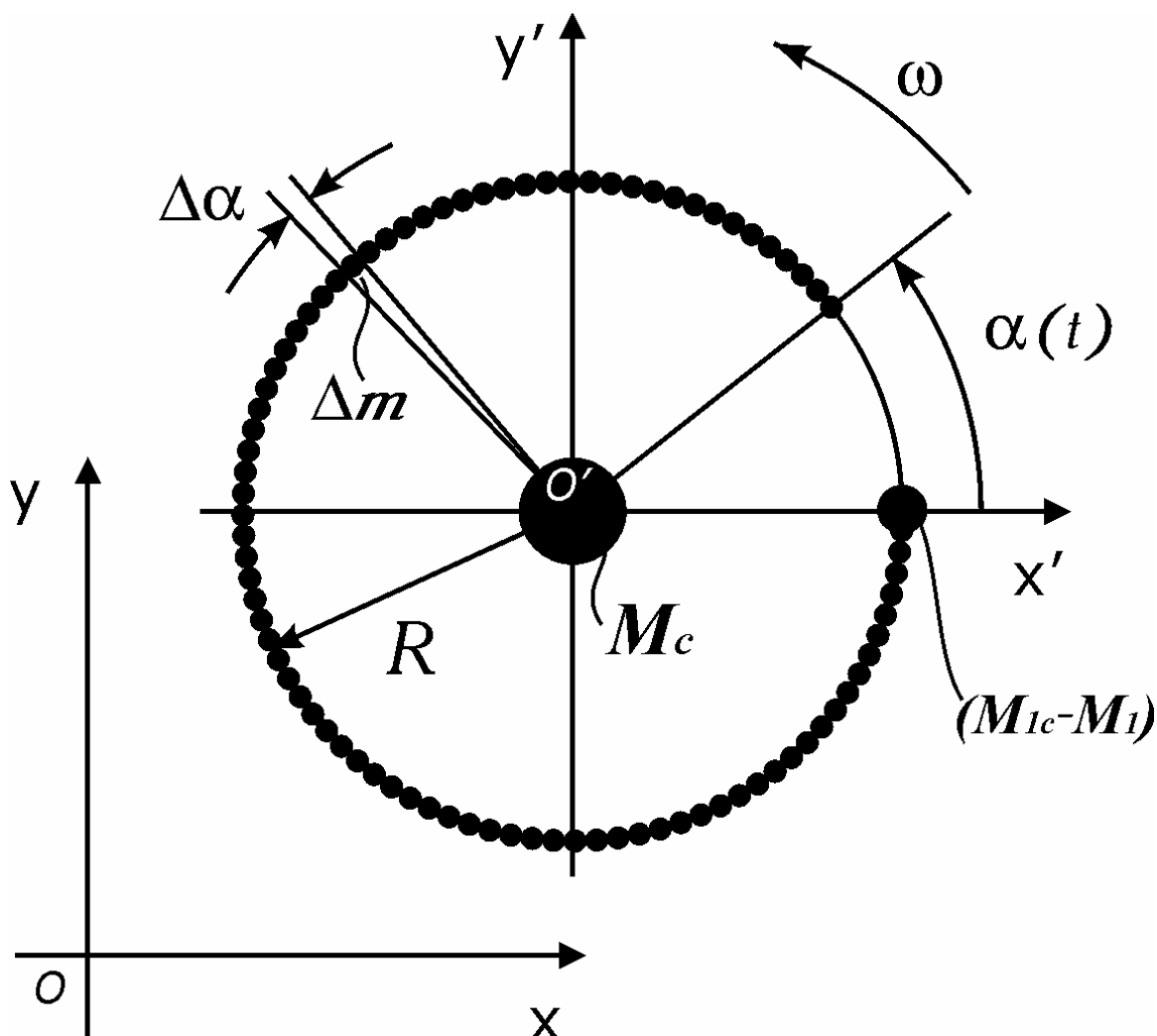


Рис. 1

Вокруг центра масс массивного тела M_c , по окружности радиуса R перемещается с постоянной скоростью система тел суммарной массой M_{lc} . Система тел распределена непрерывно и равномерно. Траектория движения системы тел жестко связана с телом M_c .

Перемещение этой системы тел можно рассматривать, как вращение тела с массой M_{lc} с постоянной угловой скоростью ω относительно некоторого центра.

Предположим, для упрощения, что каждый элемент Δm имеет бесконечно малые геометрические размеры.

В определенный момент времени $t_0 = 0$ «цепочка» тел разрывается. Каждый элемент системы начинает останавливаться в точке с координатами $[x'_{\text{end}} = R, y'_{\text{end}} = 0]$. Остановку отдельных элементов рассматриваем, как неупругий удар, после которого элементы приобретают скорость тела M_c . Остальные тела системы продолжают двигаться до полного останова, т.е., до угла раскрыва $\alpha(t) = 2\pi$.

Под углом раскрыва $\alpha(t)$, в данном случае, будем понимать угол, отсчитываемый от оси $O'X'$ до замыкающего элемента системы тел.

В начальный момент времени ($t = 0$): $\alpha_{\text{start}} = 0$ (для данной задачи).

Угол раскрыва изменяется от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int w \, dt \\ 0 \leq \alpha(t) &\leq 2\pi \end{aligned} \quad (1)$$

Время, за которое угол раскрыва меняется от 0 до 2π , назовем рабочим периодом, или рабочим циклом T .

$$0 \leq \alpha(t) \leq 2\pi \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{w}$$

Будем считать, что вся механическая система имеет две степени свободы (перемещение по осям X и Y). Примем условие, что существует ограничение поворота всей системы.

Построим две системы координат: неподвижную XOY (абсолютная система координат) и подвижную $X'O'Y'$, связанную с центром масс M_c и с центром траектории подвижных элементов.

2. Анализ движения замкнутой механической системы

2.1. Расчет количества движения системы подвижных элементов в относительной системе координат.

Количество движения материальной системы равно массе всей системы, умноженной на скорость ее центра инерции. В нашем случае:

$$Q_1 = M_1 V_{1c} \quad (2)$$

Здесь M_1 — это масса всех элементов системы, перемещающихся по окружности. Из условий задачи следует, что в начальный момент времени масса распределена равномерно. Отсюда можно принять:

$$\rho = \frac{M_{1c}}{2\pi} \quad (3)$$

ρ — угловая плотность распределения элементов системы тел по окружности (дуге окружности).

Величина M_1 изменяется линейно за время $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{w}$:

$$M_1(t) = \rho (2\pi - \alpha(t)) \quad (4)$$

откуда:

$$M_1(t) = \frac{M_{1c} (2\pi - \alpha(t))}{2\pi} \quad (5)$$

$$\rho = \frac{M_1(t)}{2\pi - \alpha(t)}$$

Можно также записать:

Величина $(2\pi - \alpha(t))$ определяет угол на траектории, заполненной движущимися элементами.

В случае нашей задачи, центр масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ вычисляется:

$$x'_{cm1} = \frac{\sum_{i=1}^n x'_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y'_{cm1} = \frac{\sum_{i=1}^n y'_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

где x_i, y_i — координаты i -го участка тела массой m_i .

Координаты i -го подвижного элемента в выбранной системе координат:

$$x'_i = R \cos(\alpha(t))$$

$$y'_i = R \sin(\alpha(t))$$

Из условий нашей задачи:

$$\sum_{i=1}^n m_i = M_1$$

$$\sum_{i=1}^n x'_i m_i = \sum_{i=1}^n x'_i (\rho \Delta\alpha) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1 R \cos(\alpha(t))}{2\pi - \alpha(t)} \partial\alpha$$

$$\sum_{i=1}^n y'_i m_i = \sum_{i=1}^n y'_i (\rho \Delta\alpha) = \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1 R \sin(\alpha(t))}{2\pi - \alpha(t)} \partial\alpha$$

Координаты центра масс подвижных элементов в выбранной системе координат вычисляются с помощью интегралов с переменным нижним пределом:

$$x'_{cm1} = \frac{1}{M_1} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1 R \cos(\alpha(t))}{2\pi - \alpha(t)} \partial\alpha \quad (6)$$

$$y'_{cm1} = \frac{1}{M_1} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{M_1 R \sin(\alpha(t))}{2\pi - \alpha(t)} \partial\alpha$$

После интегрирования получим:

$$\boxed{x'_{cm1} = -\frac{R \sin(\alpha(t))}{2\pi - \alpha(t)}} \quad (7)$$

$$\boxed{y'_{cm1} = \frac{R (1 - \cos(\alpha(t)))}{2\pi - \alpha(t)}} \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) определяют координаты центра масс подвижных элементов в зависимости от угла раскрыва $\alpha(t)$. Из условия задачи угол раскрыва изменяется линейно с течением времени:

$$\alpha(t) = w t$$

График перемещения ЦМ системы подвижных элементов представлен на Рис. 2:

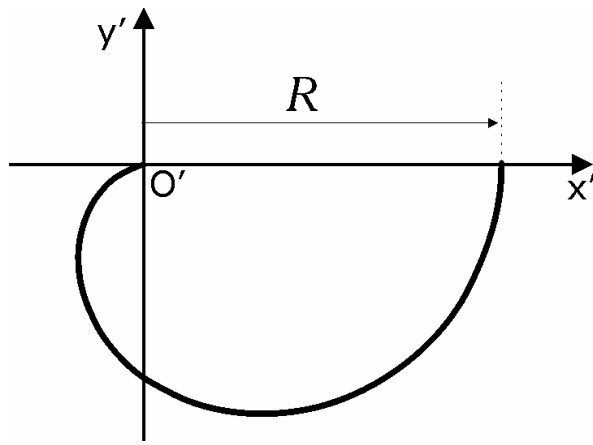


Рис. 2

На Рис. 3 показано условное перемещения центра масс подвижной системы.

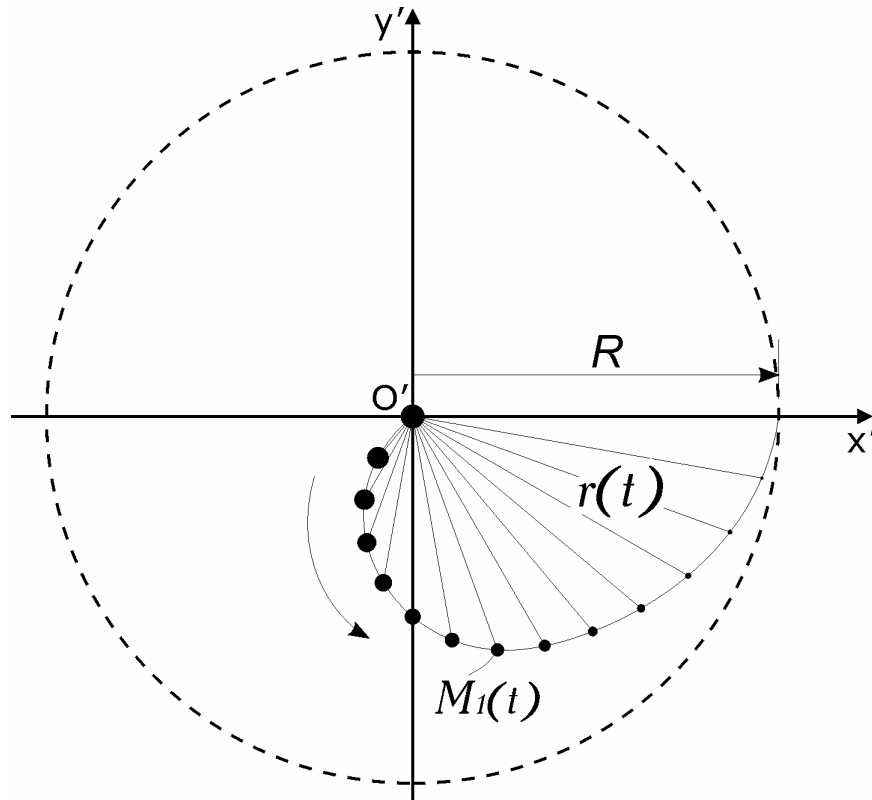


Рис. 3

Перемещение центра масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ можно сравнить с перемещением центра масс маятника переменной длины $r(t)$ и переменной массы $M_1(t)$.

В проекции на оси системы координат $X'O'Y'$ количество движения Q_1 :

$$Q_{1x'} = M_1 \dot{x}'_{1c}$$

$$Q_{1y'} = M_1 \dot{y}'_{1c}$$

$$\dot{x}'_{1c} = \frac{d}{dt} x'_{1cm} = -\frac{R w \cos(\alpha)}{2\pi - \alpha} - \frac{R w \sin(\alpha)}{(2\pi - \alpha)^2}$$

$$\dot{y}'_{1c} = \frac{d}{dt} y'_{1cm} = -\frac{R w \sin(\alpha)}{2\pi - \alpha} + \frac{R w (\cos(\alpha) - 1)}{(2\pi - \alpha)^2}$$

$$Q_{1x'} = M_1 \left(-\frac{R w \cos(\alpha)}{2\pi - \alpha} - \frac{R w \sin(\alpha)}{(2\pi - \alpha)^2} \right) \quad (9)$$

$$Q_{1y'} = M_1 \left(-\frac{R w \sin(\alpha)}{2\pi - \alpha} + \frac{R w (\cos(\alpha) - 1)}{(2\pi - \alpha)^2} \right) \quad (10)$$

В проекции на оси системы координат XOY количество движения Q_1 :

$$Q_{1x} = M_1 \left(\dot{x}_c - \frac{R w \cos(\alpha)}{2\pi - \alpha} - \frac{R w \sin(\alpha)}{(2\pi - \alpha)^2} \right) \quad (11)$$

$$Q_{1y} = M_1 \left(\dot{y}_c - \frac{R w \sin(\alpha)}{2\pi - \alpha} + \frac{R w (\cos(\alpha) - 1)}{(2\pi - \alpha)^2} \right) \quad (12)$$

, где

$$\dot{x}_c = \frac{d}{dt} x_c(t)$$

$$\dot{y}_c = \frac{d}{dt} y_c(t)$$

проекции скорости начала координат системы X'O'Y' на соответствующие оси системы XOY.

Напомним: начало координат системы X'O'Y' связано с центром масс тела M_c

2.2. Расчет количества движения замкнутой механической системы тел в абсолютной системе координат за рабочий период.

Количество движения всей материальной системы, изображенной на Рис. 1:

$$Q_0 = M_c V_c + (M_{1c} - M_1) V_c + Q_1 \quad (13)$$

Здесь:

Q_0 — количество движения всей замкнутой системы, состоящей из тела M_c и системы подвижных элементов общей массой M_{1c}

V_c — скорость центра масс тела M_c с присоединившимися элементами $(M_{1c} - M_1)$.

$(M_{lc} - M_l)$ — масса части подвижных элементов, не участвующих в движении по окружности радиуса R . Остановившись в точке $[x'_{l\text{end}}=R, y'_{l\text{end}}=0]$, эти элементы приобретают скорость тела M_c . (Из условия задачи.)

Q_1 — количество движения системы подвижных элементов. Проекция Q_1 на оси координат найдены выше (12).

Как известно, центром масс материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор r которой определяется равенством

$$r_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m m_k r_k \quad (14)$$

Поскольку за рабочий период к телу M_c присоединяются дополнительные частицы, координаты центра масс тела M_c рассчитываются следующим образом:

$$x_{0c}(t) = \frac{M_c x_c(t) + (M_{lc} - M_l)(x_c(t) + R)}{M_0} \quad (15)$$

$$y_{0c}(t) = \frac{M_c y_c(t) + (M_{lc} - M_l)y_c(t)}{M_0}$$

где $x_c(t)$ и $y_c(t)$ — координаты центра масс тела M_c в системе координат XOY.

После подстановки

$$M_l(t) = \frac{M_{lc} (2\pi - \alpha(t))}{2\pi} \quad \text{и}$$

$$\alpha(t) = \omega t,$$

получим:

$$x_{0c}(t) = \frac{2 \left(M_c x_c(t) + \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - \omega t)}{2\pi} \right) (x_c(t) + R) \right) \pi}{2 M_c \pi + M_{lc} \omega t}$$

$$y_{0c}(t) = \frac{2 \left(M_c y_c(t) + \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - \omega t)}{2\pi} \right) y_c(t) \right) \pi}{2 M_c \pi + M_{lc} \omega t}$$

Проекция скоростей на соответствующие оси координат:

$$V_{0cx} = \frac{d}{dt} x_{0c}(t)$$

$$V_{0cy} = \frac{d}{dt} y_{0c}(t)$$

$$V_{0cx} = 2 \left(M_c \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) + \frac{1}{2} \frac{M_{lc} w (x_c(t) + R)}{\pi} \right) +$$

$$+ \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - wt)}{2\pi} \right) \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) \pi / (2 M_c \pi + M_{lc} w t) -$$

$$- \frac{2 \left(M_c x_c(t) + \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - wt)}{2\pi} \right) (x_c(t) + R) \right) \pi M_{lc} w}{(2 M_c \pi + M_{lc} w t)^2}$$

$$V_{0cy} = 2 \left(M_c \left(\frac{d}{dt} y_c(t) \right) + \frac{1}{2} \frac{M_{lc} w y_c(t)}{\pi} \right) +$$

$$+ \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - wt)}{2\pi} \right) \left(\frac{d}{dt} y_c(t) \right) \pi / (2 M_c \pi + M_{lc} w t) -$$

$$- \frac{2 \left(M_c y_c(t) + \left(M_{lc} - \frac{M_{lc} (2\pi - wt)}{2\pi} \right) y_c(t) \right) \pi M_{lc} w}{(2 M_c \pi + M_{lc} w t)^2}$$

или, после упрощения:

$$V_{0cx} = \left(4 M_c^2 \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) \pi^2 + 4 M_c \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) \pi M_{lc} w t + \right.$$

$$\left. + 2 M_{lc} w R M_c \pi + M_{lc}^2 w^2 t^2 \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) \right) / (2 M_c \pi + M_{lc} w t)^2 \quad (16)$$

$$V_{0cy} = \frac{d}{dt} y_c(t)$$

В проекции на оси системы координат XOY количество движения Q_0 (из (13)):

$$Q_{0x} = M_c V_{0cx} + (M_{lc} - M_1) V_{0cx} + Q_{1x} \quad (17)$$

$$Q_{0y} = M_c V_{0cy} + (M_{lc} - M_1) V_{0cy} + Q_{1y}$$

В соответствии с законом сохранения количества движения замкнутой системы:

$$\begin{cases} Q_{0x} = 0 \\ Q_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$Q_{0x} = \frac{1}{2} \left(-4 M_{Ic} \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right) \left(M_c \pi + \frac{M_{Ic} wt}{2} \right) w R \cos(wt) + (-2 M_{Ic} w R M_c \pi - M_{Ic}^2 w^2 R t) \sin(wt) \right. \\ \left. + 8 \pi \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right) \left(\left(M_c \pi + \frac{M_{Ic} wt}{2} \right) (M_c + M_{Ic}) \left(\frac{d}{dt} x_c(t) \right) + \frac{M_{Ic} w R M_c}{2} \right) \right) / ((2 \pi - wt) \pi (2 M_c \pi + M_{Ic} wt))$$

$$Q_{0y} = \frac{-2 M_{Ic} \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right) w R \sin(wt) + M_{Ic} w R \cos(wt) + 4 \pi \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right) (M_c + M_{Ic}) \left(\frac{d}{dt} y_c(t) \right) - M_{Ic} w R}{-2 t \pi w + 4 \pi^2}$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений относительно координат $x_c(t)$ и $y_c(t)$, с учетом начальных условий:

$$x_c(0) = 0$$

$$y_c(0) = 0$$

дает следующие результаты:

$$x_c(t) = \frac{\left(-M_c \pi \ln(2 M_c \pi + M_{Ic} w t) - \frac{1}{2} M_{Ic} \operatorname{Si}(w t - 2 \pi) + M_c \ln(2 M_c \pi) \pi + \frac{1}{2} (\sin(w t) - \operatorname{Si}(2 \pi)) M_{Ic} \right) R}{(M_c + M_{Ic}) \pi} \quad (19)$$

$$y_c(t) = \frac{1}{2} \frac{M_{Ic} R (-\cos(w t) + \operatorname{Ci}(w t - 2 \pi) - \ln(w t - 2 \pi) + 1 - \operatorname{Ci}(-2 \pi) + \ln(2) + \ln(\pi) + \pi I)}{(M_c + M_{Ic}) \pi} \quad (18)$$

, где:

γ — константа Эйлера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \ln(n) \approx 0.5772156649...$$

Ci – косинусный интеграл:

$$\operatorname{Ci}(x) = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$$

Si – синусный интеграл:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

На Рис. 4 представлен график изменения координат $x_c(t)$ и $y_c(t)$ за рабочий период.

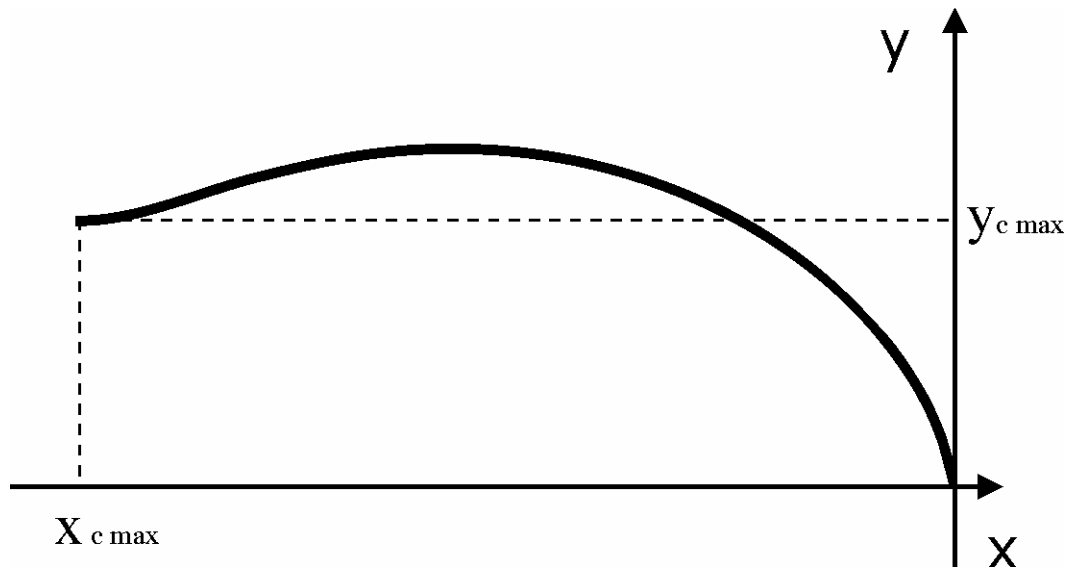


Рис. 4

Еще раз напомним, что $x_c(t)$ и $y_c(t)$ — координаты центра масс тела M_c в системе координат XOY, т.е. в «абсолютной» системе координат.

$x_0(t)$ и $y_0(t)$ — координаты центра масс всей замкнутой механической системы в системе координат XOY.

Величины $x_{c \max}$ и $y_{c \max}$ можно найти следующим образом:

$$x_{c \max} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{w}} x_c(t)$$

$$y_{c \max} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{w}} y_c(t)$$

$$x_{c \max} = \frac{1}{2} \frac{R (-2 M_c \pi \ln(M_c + M_{lc}) + 2 M_c \pi \ln(M_c) - M_{lc} \text{Si}(2\pi))}{\pi (M_c + M_{lc})} \quad (20)$$

$$y_{c \max} = \frac{1}{2} \frac{(-\text{Ci}(-2\pi) + \gamma + \ln(\pi) + \ln(2)) M_{lc} R}{\pi (M_{lc} + M_c)} \quad (21)$$

Выражение

$$k = (-\text{Ci}(2\pi) + \gamma + \ln(2) + \ln(\pi)) \quad (22)$$

есть величина постоянная.

С точностью до 9 знака значение коэффициента k составляет:

$$k = 2.437653393$$

$$y_{c \max} = \frac{k}{2\pi} \frac{M_{lc} R}{(M_c + M_{lc})} \quad (23)$$

(24)

$$y_{c \max} = 0.38796 \frac{M_{lc}}{(M_c + M_{lc})} R$$

С координатой $y_c(t)$ совпадает и центр масс всей системы (16).

$$y_0(t) = y_c(t)$$

Перемещение центра масс всей системы тел имеет вид (Рис. 5) :

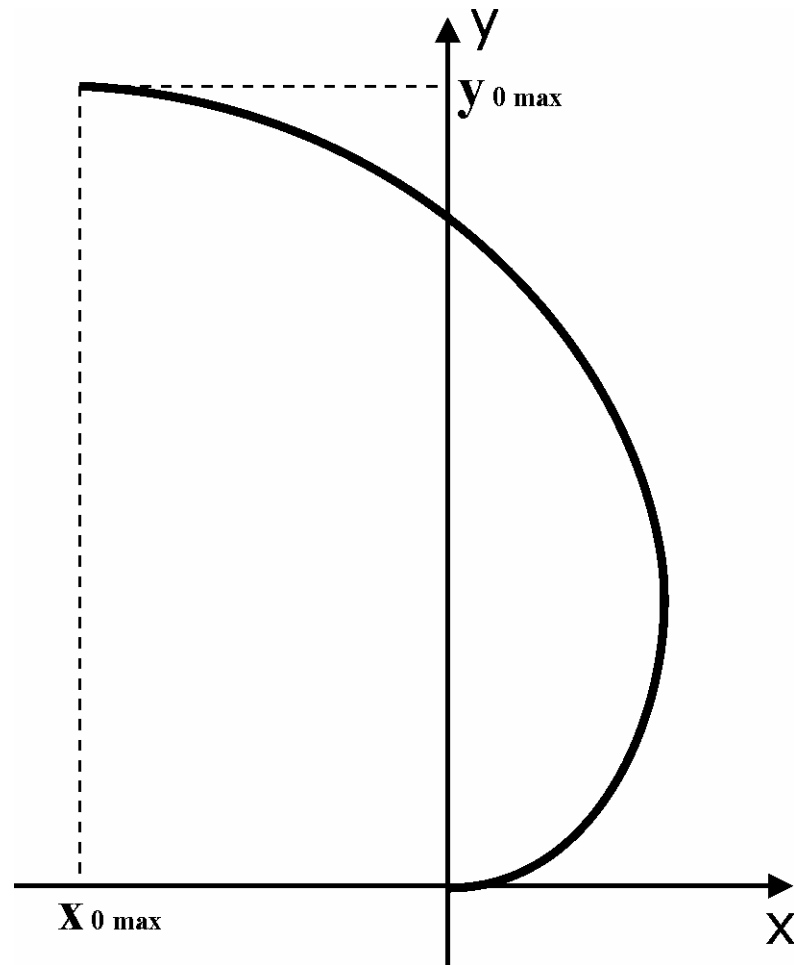


Рис. 5

$$y_{o \max} = y_{c \max}$$

$$y_0(t) = \frac{1}{2} \frac{(\pi I + \text{Ci}(wt - 2\pi) - \ln(wt - 2\pi) - \text{Ci}(-2\pi) + \ln(\pi) + \ln(2)) R M_{lc}}{\pi (M_{lc} + M_c)} \quad (25)$$

(26)

$$x_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{(2 M_c \pi \ln(M_{lc} + M_c) - 2 M_c \pi \ln(M_c) + (-2 \pi + \text{Si}(2 \pi)) M_{lc}) R}{\pi (M_{lc} + M_c)}$$

$$y_{o \max} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{w}} y_0(t) = y_{c \max}$$

$$x_{o \max} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{w}} x_0(t) = \frac{\left(M_c \pi \ln(M_{lc} + M_c) - M_c \pi \ln(M_c) + \left(-\pi + \frac{1}{2} \text{Si}(2 \pi) \right) M_{lc} \right) R}{\pi (M_{lc} + M_c)}$$

Зависимость перемещения центра масс всей замкнутой системы представлены на Рис. 6 и Рис. 7.

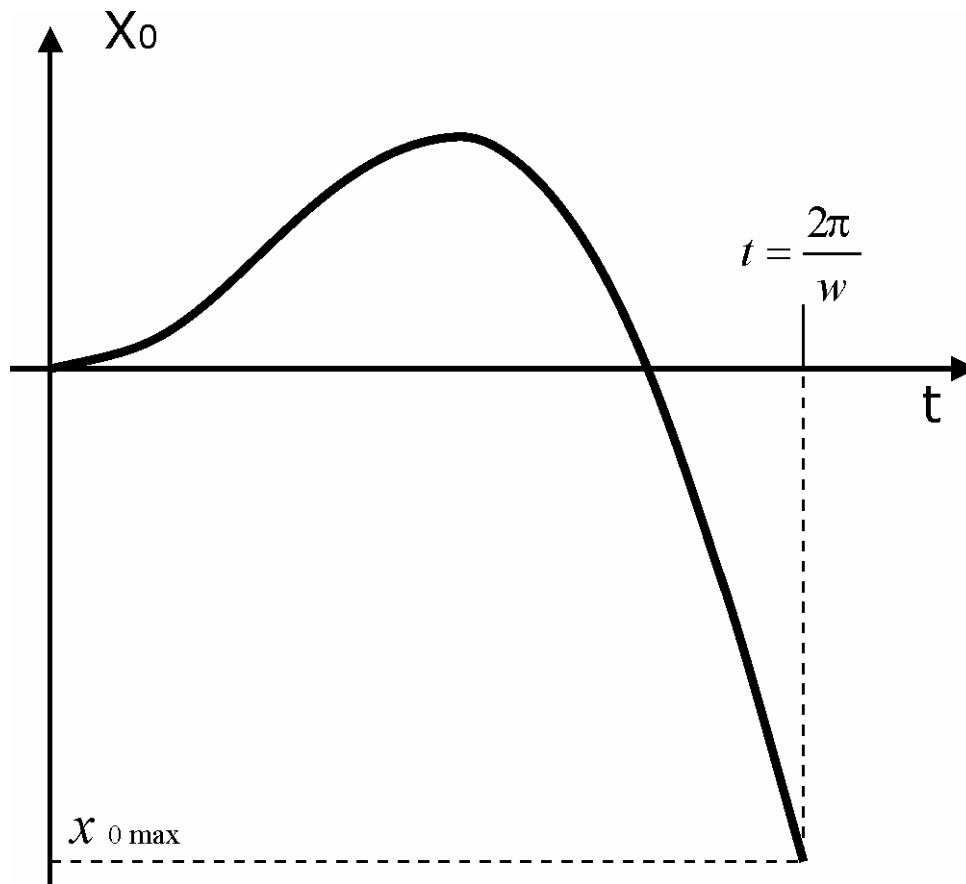


Рис. 6

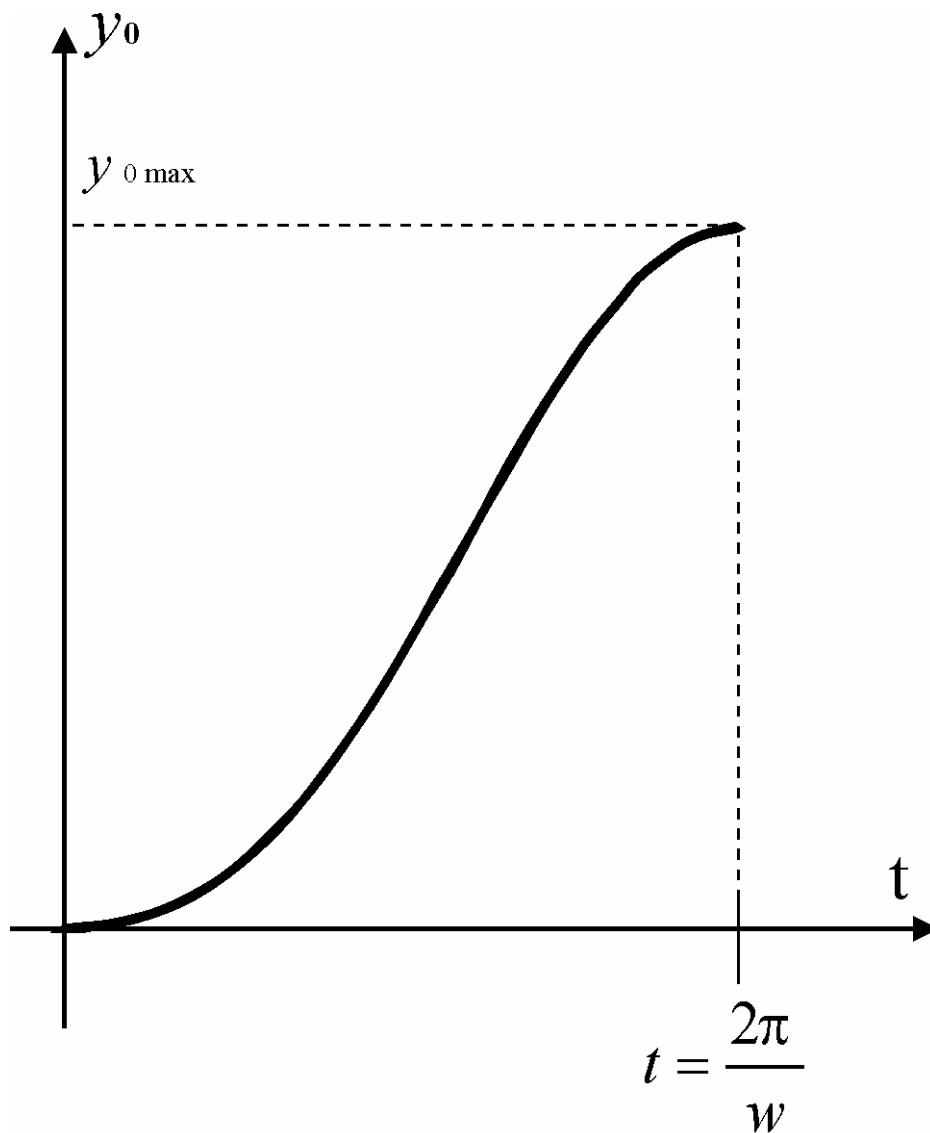


Рис. 7

Выводы.

При условии сохранения импульса данная система (Рис. 1) перемещается за определенный промежуток времени на определенное расстояние.

3. Анализ движения механической системы (Рис. 1) с помощью уравнений Лагранжа II рода.

Для голономных систем уравнения Лагранжа в общем случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где q_i — обобщённые координаты, число которых равно числу n степеней свободы системы, \dot{q}_i — обобщённые скорости, Q_i — обобщённые силы, T — кинетическая энергия системы, выраженная через q_i и \dot{q}_i .

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии тела M_c , к которому за рабочий период присоединяются частицы, и кинетической энергии системы подвижных элементов переменной массы M_1 .

$$T = T_0 + T_1 \quad (27)$$

$$T_0 = \frac{M_0 (V_{cx}^2 + V_{cy}^2)}{2}, \text{ где} \quad (28)$$

$$M_0 = M_c + (M_{lc} - M_1)$$

$$V_{cx} = \frac{d}{dt} x_c(t)$$

$$V_{cy} = \frac{d}{dt} y_c(t)$$

Кинетическая энергия системы подвижных элементов складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и вращательного относительно центра масс.

$$T_1 = \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

$$T_1 = \frac{M_{lc} (2\pi - \omega t) ((V_{cx} + V_{xl})^2 + (V_{cy} + V_{yl})^2)}{4\pi} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

Скорость центра масс системы подвижных элементов складывается из собственной скорости V_1 и переносной V_c .

$(V_{cx} + V_{xl})$ и $(V_{cy} + V_{yl})$ — соответственно проекции скорости центра масс системы подвижных элементов на оси OX и OY .

I_c — момент инерции системы подвижных элементов относительно центра масс системы.

$$T = \frac{M_0 (V_{0x}^2 + V_{0y}^2)}{2} + \frac{M_{lc} (2\pi - \omega t) ((V_{cx} + V_{xl})^2 + (V_{cy} + V_{yl})^2)}{4\pi} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial V_{cx}} T = M_0 V_{0x} + \frac{M_{lc} (2\pi - \omega t) (2V_{cx} + 2V_{xl})}{4\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial V_{cy}} T = M_0 V_{0y} + \frac{M_{lc} (2\pi - wt)(2V_{cy} + 2V_{yl})}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial V_{cx}} T \right) &= \frac{1}{8} \left(32\pi^2 \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right)^2 (M_c + M_{lc}) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) + 16R \times \right. \\ &\times w^2 \left(\left(\frac{1}{4} w^2 \pi t^2 - w\pi^2 t - \frac{1}{4} \pi + \pi^3 \right) \sin(wt) - \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{wt}{2} + \pi \right) \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cos(wt) - \frac{wt}{4} \right) \right) M_{lc} \right) / ((2\pi - wt)^2 \pi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial V_{cy}} T \right) &= \frac{1}{2} \left(2\pi (wt - 2\pi)^2 (M_c + M_{lc}) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_c(t) \right) + M_{lc} w^2 \times \right. \\ &\times ((4\pi wt - w^2 t^2 - 4\pi^2 + 1) \cos(wt) - 1 + (wt - 2\pi) \sin(wt)) R \left. \right) / \\ &/ (\pi (wt - 2\pi)^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_c} = 0$$

По условию задачи, на нашу механическую систему не действуют внешние силы. Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial V_{cx}} T \right) + \frac{\partial T}{\partial x_c} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial V_{cy}} T \right) + \frac{\partial T}{\partial y_c} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Решение системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно $x_c(t)$ и $y_c(t)$, с учетом начальных условий:

$$x_c(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
y_c(0) &= 0 \\
\frac{d}{dt}x_c(0) &= 0 \\
\frac{d}{dt}y_c(0) &= 0
\end{aligned}$$

дает следующие результаты:

$$x_c(t) = \frac{1}{2} \frac{M_{lc} R (\sin(w t) - \text{Si}(w t - 2\pi) - w t - \text{Si}(2\pi))}{\pi (M_c + M_{lc})} \quad (30)$$

$$y_c(t) = -\frac{1}{2} \frac{M_{lc} R (\ln(w t - 2\pi) + \cos(w t) - \text{Ci}(w t - 2\pi) - \ln(2) - \ln(\pi) - 1 + \text{Ci}(-2\pi))}{\pi (M_c + M_{lc})} \quad (31)$$

Значение координаты y_c в момент времени $t = \frac{2\pi}{w}$:

$$y_{cmax} = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + \ln(2) - \text{Ci}(-2\pi) + \ln(\pi)) M_{lc} R}{\pi (M_c + M_{lc})} \quad (32)$$

Или, примерно, с точностью до 5 знака:

$$y_{cmax} = \frac{0.38797 M_{lc} R}{M_c + M_{lc}}$$

Что в точности соответствует результатам, полученным ранее (21) и (23).

Значение координаты x_c в момент времени $t = \frac{2\pi}{w}$:

$$\begin{aligned}
x_{cmax} &= \frac{-M_{lc} R \text{Si}(2\pi) - 2 M_{lc} R \pi}{2 M_c \pi + 2 \pi M_{lc}} \\
x_{cmax} &\approx -\frac{1.2257 M_{lc} R}{M_c + M_{lc}}
\end{aligned} \quad (33)$$

Сравнение выражений (33) и (20) показывает, что при $M_{lc} \ll M_c$,

значения x_{cmax} практически равны. (При $M_c = 10 M_{lc}$ ошибка составляет $< 0.5\%$. Возможно, это связано с методом решения дифференциальных уравнений.).

Анализ движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа также показывает возможность перемещения замкнутой механической системы без внешнего воздействия.

4. Выводы

Расчет перемещения центра масс замкнутой механической системы выполнен на основании закона сохранения импульса и с помощью уравнений Лагранжа II рода.

За время T суммарный импульс системы равен нулю (Рис. 8). Перемещение всей замкнутой системы возникает только во время рабочего периода.

На Рис. 8 представлены графики изменения импульсов за рабочий период:
системы подвижных элементов —

$$M_1(t) (V_{1y} + V_{cy})$$

и «неподвижной», корпуса —

$$(M_c + M_{1c} - M_1(t)) V_{cy}$$

График суммарного импульса, т.е. количества движения всей системы, совпадает с осью абсцисс графика.

Если в любой момент времени остановить систему подвижных элементов, вся механическая система будет иметь начальную скорость.

Если в начальный момент времени вся механическая система имела нулевую скорость в системе XOY , то после остановки системы подвижных элементов скорость всей механической системы также будет равняться нулю!

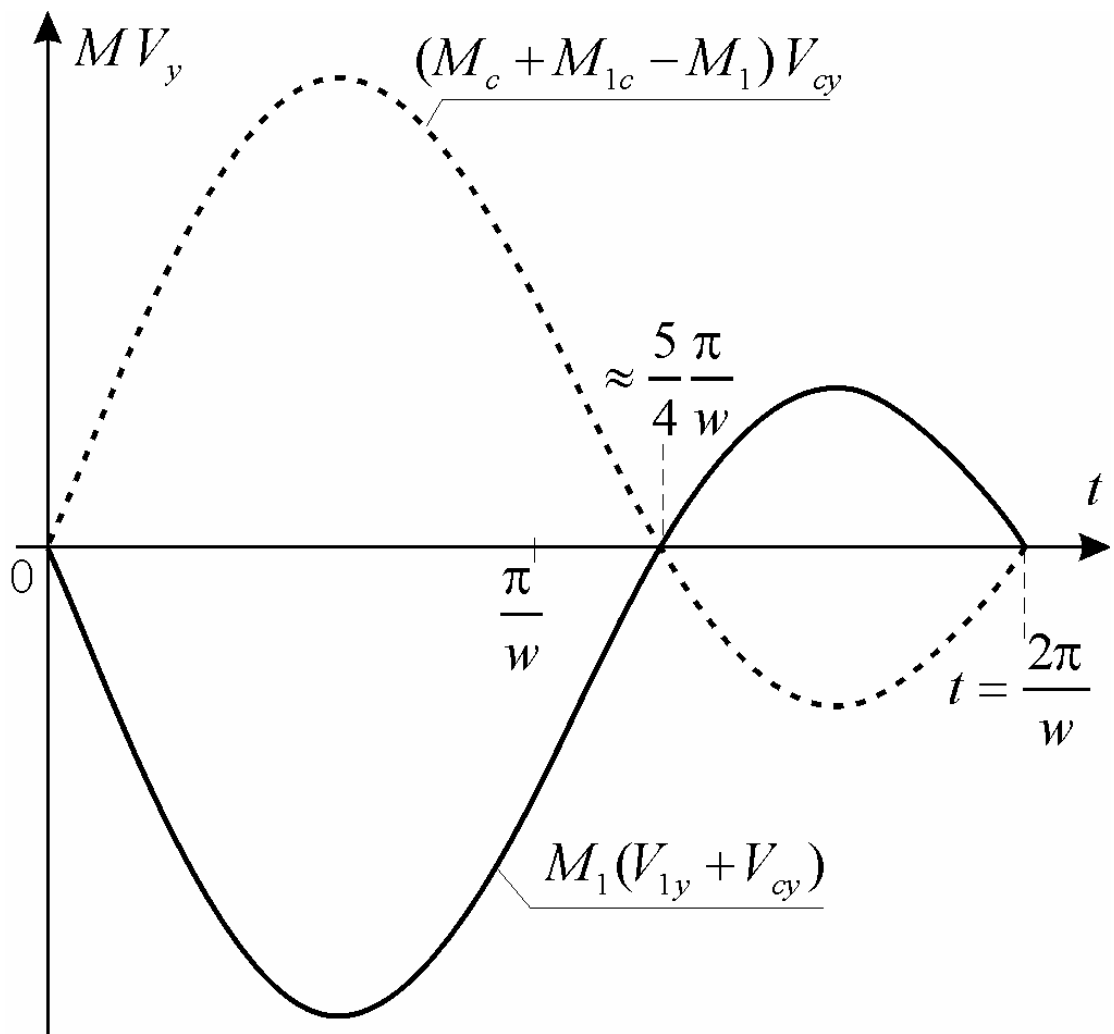


Рис. 8

Можно говорить только об условной скорости и условном ускорении центра масс всей механической системы за рабочий период.

Скорость системы есть производная по времени от координаты.

Оставим пока в стороне расчет по одной из координат. Ниже будет пояснено, в связи с чем это связано.

Наибольший интерес представляет изменение координаты $y_0(t)$ (25) или (31).

$$V_y = \frac{d}{dt} y_0(t)$$

$$V_y = \frac{1}{2} \frac{w (\cos(w t) - 1) M_{lc} R}{(w t - 2 \pi) (M_c + M_{lc}) \pi} \quad (34)$$

$$a_y = \frac{d}{dt} V_y \quad (35)$$

$$a_y = -\frac{1}{2} \frac{M_{lc} \omega^2 R (\sin(\omega t) \omega t - 2 \sin(\omega t) \pi + \cos(\omega t) - 1)}{(\omega t - 2\pi)^2 (M_c + M_{lc}) \pi}$$

Соответствующие графики изменения скорости и ускорения всей замкнутой механической системы представлены на Рис. 9 и Рис. 10

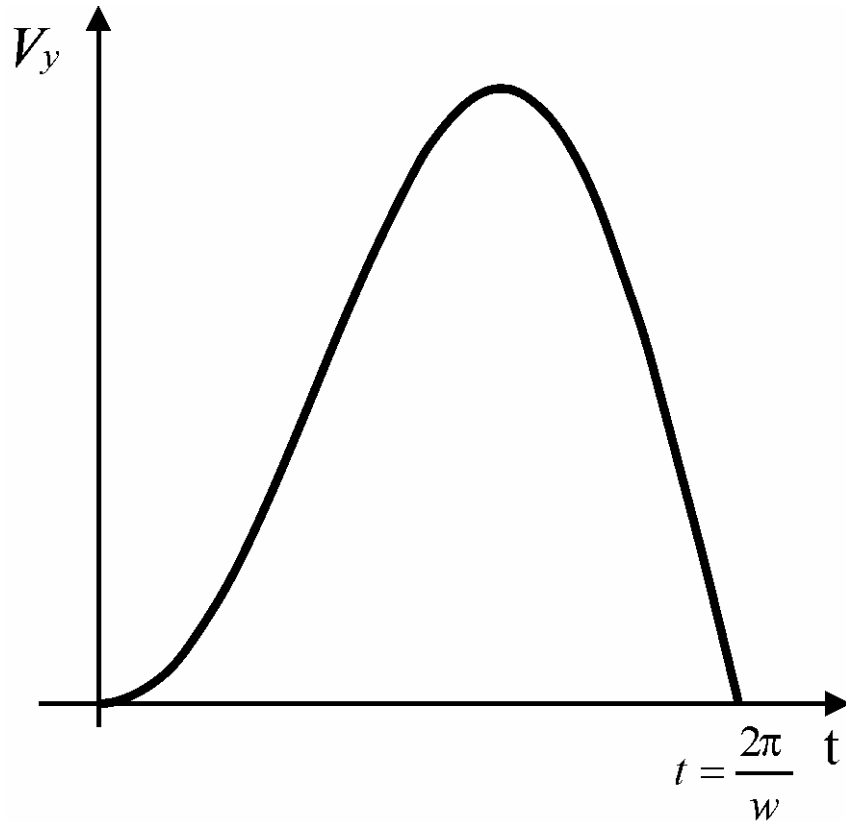


Рис. 9

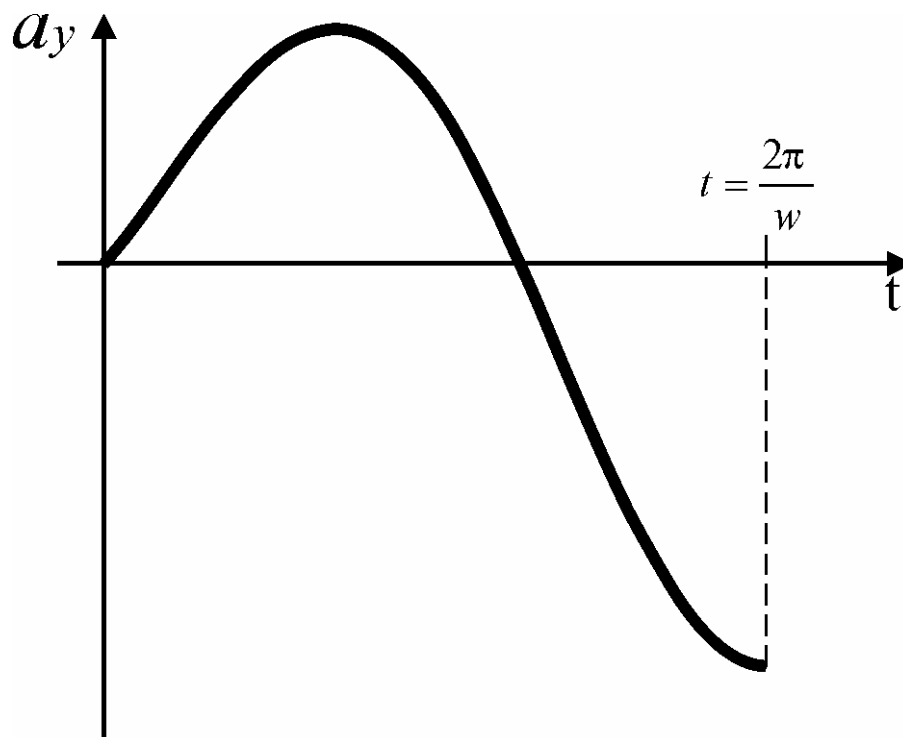


Рис. 10

4.1. Расчет силы, развиваемой системой подвижных элементов.

Согласно одноименной теореме, изменение количества движения системы тел равно сумме всех внешних сил, приложенных к системе тел.

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e$$

По условиям нашей задачи это равенство выполняется: внешние силы отсутствуют и изменение количества движения всей системы равно нулю.

В то же время, график на Рис. 5, характеризующий перемещение системы тел, не является прямолинейным.

Попытаемся найти силу, которая могла бы вызвать подобное перемещение за такой же промежуток силы для тела, такой же массы, как и масса всей замкнутой системы.

Силу \vec{F} будем определять в проекциях на оси: F_x и F_y

Соответствующие проекции ускорения, которое было бы вызвано данной силой, определяются, как:

$$a_{0x} = \frac{F_x}{(Mc + Mc)}$$

$$a_{0y} = \frac{F_y}{(Mc + Mc)}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \iint a_{0x} dt dt \\ y_0(t) &= \iint a_{0y} dt dt \end{aligned} \quad (36)$$

где: $x_0(t)$ и $y_0(t)$ координаты положения центра масс всей замкнутой системы ((25) и (26));

Решение системы уравнений (36) приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} F_x = & R(2 M_c \pi (-\ln(2 M_c \pi + M_{lc} w t) + \ln(\pi) + \ln(M_c) + \ln(2)) + \\ & + M_{lc} (w t - \text{Si}(2 \pi) - \text{Si}(w t - 2 \pi)))/(t^2 \pi) \end{aligned}$$

$$F_y = \frac{R(\ln(2) + \ln(\pi) + \pi I + \text{Ci}(wt - 2\pi) - \ln(wt - 2\pi) - \text{Ci}(-2\pi)) M_{lc}}{t^2 \pi}$$

Средние значения функций F_x и F_y за период $0 < t < \frac{2\pi}{w}$:

$$F_{xcp} = \frac{1}{4} \frac{\text{Si}(2\pi) M_{lc} w^2 R}{\pi^3} \quad (37)$$

$$F_{ycp} = \frac{1}{4} \frac{(\pi I + \ln(\pi) + \ln(2) - \text{Ci}(-2\pi) + \gamma) M_{lc} w^2 R}{\pi^3} \quad (38)$$

Сила перемещения есть результат центростремительных сил инерции.

Этот вывод можно сделать на основании пропорциональности значений F_x и F_y величине: $w^2 R$.

Графики функции F_x и F_y представлены на Рис. 11 и Рис. 12:

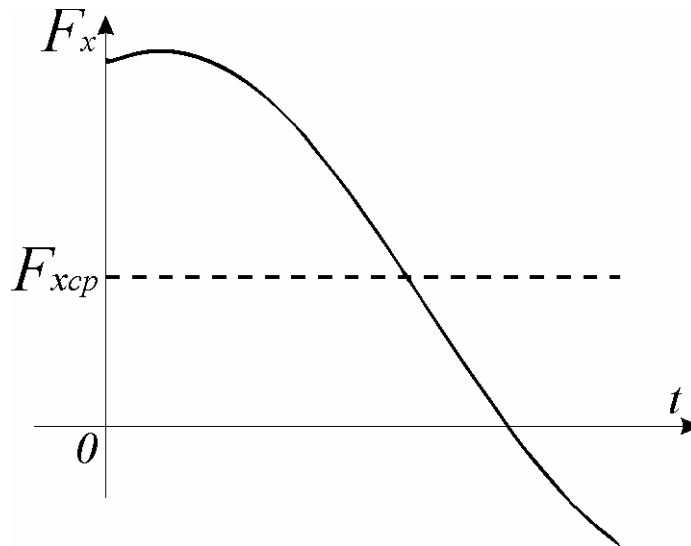


Рис. 11

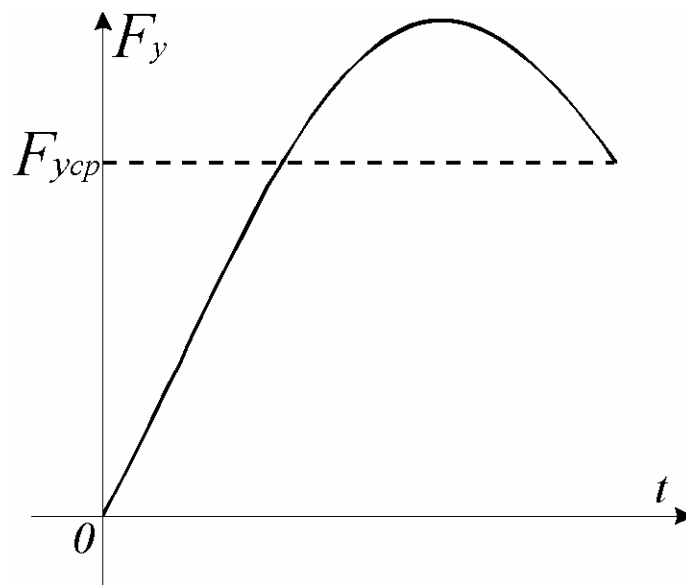


Рис. 12

4.2. Работа силы и мощность.

При движении механической системы сумма работ всех действующих сил на некотором перемещении равна изменению её кинетической энергии T , т. е.:

$$\sum A_i = T_1 - T_0$$

где T_1 и T_0 — значение кинетической энергии в начальном и конечном положениях системы.

Для нашей рассматриваемой задачи:

$$T_1 = T_0 = 0$$

т.е., кинетическая энергия всей системы в начальном и конечном положениях равна нулю.

Следовательно, **сила, развиваемая системой подвижных элементов, не совершает работу.**

Система подвижных элементов за рабочий период изменяет свою кинетическую энергию в интервале:

$$0 \leq T \leq \frac{1}{2} M_{lc} w^2 R^2 \quad (39)$$

Возрастание кинетической энергии — это перевод системы подвижных элементов в рабочее состояние.

Убывание кинетической энергии — остановка подвижных элементов во время рабочего цикла.

Из этого интервала определим работу по перемещению подвижных элементов:

$$|A| = \frac{1}{2} M_{lc} w^2 R^2 \quad (40)$$

Мощность, развиваемая системой подвижных элементов за рабочий период:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Aw}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} M_{1c} w^3 R^2 \quad (41)$$

Примечание:

Значения работы и мощности найдены из условия, что элементы подвижной системы полностью останавливаются по завершении рабочего цикла. В реальных устройствах это делать нецелесообразно. Желательно изменять скорость подвижных элементов только по одной координате.

В таком случае, можно использовать запас кинетической энергии подвижной системы для перевода СЭ в рабочее состояние. При этом значения (40) и (41) будут значительно меньше.

5. Групповая работа. Объединение нескольких систем подвижных элементов.

Процесс перемещения рассмотренной системы $y_0(t)$ можно повторить.

Для этого требуется переместить массу M_{1c} , которая собирается на расстоянии R от центра масс M_c , в центр масс M_c . **Не нарушая положения центра масс** всей системы, равномерно рассредоточить систему подвижных элементов M_{1c} по окружности радиуса R . Придать системе подвижных элементов угловую скорость W . После этого, рабочий цикл можно повторить (Рис. 25, Рис. 26).

Для того чтобы исключить из расчетов координату $x_0(t)$ и $\Omega_0(t)$ (где $\Omega_0(t)$ — угол поворота всей механической системы), удобно внести в замкнутую механическую систему еще одну систему подвижных элементов, совершающих движение, зеркально симметричное первой системе подвижных элементов относительно оси $O'Y'$.

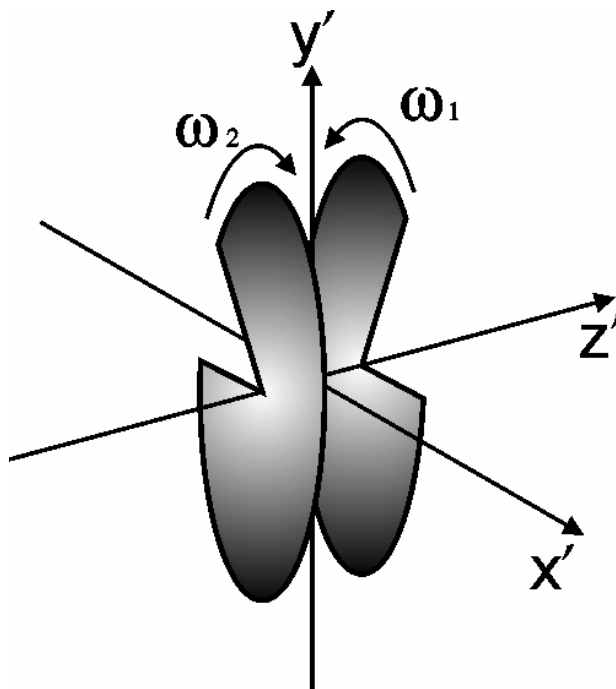


Рис. 13

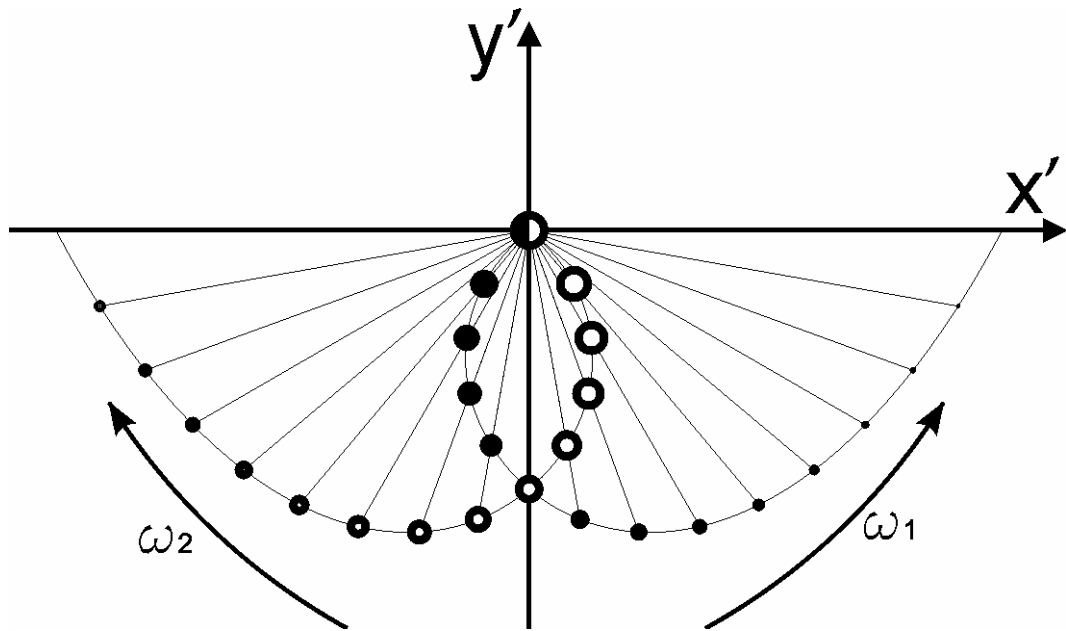


Рис. 14

Под зеркальной симметрией движения подразумевается :

стартовый угол $\alpha_{2\text{ start}} = \pi - \alpha_{1\text{ start}}$

угловая скорость $\omega_2 = -\omega_1$

изменение массы подвижных элементов $M_2(t) = M_1(t)$

элементы подвижной системы останавливаются в точке с координатами $[x'_{2\text{ end}} = -R, y'_{2\text{ end}} = 0]$

Координаты центра масс второй подвижной системы

$$x_{cm2}(t) = \frac{R \sin(\omega t)}{2\pi - \omega t} = -x_{cm1}(t)$$

$$y_{cm2}(t) = \frac{R (1 - \cos(\omega t))}{2\pi - \omega t} = y_{cm1}(t)$$

В проекции на оси системы координат X'O'Y' количество движения Q_2 :

$$Q_{2x} = M_2 \frac{d}{dt} x_{cm2} = -Q_{1x}$$

$$Q_{2y} = M_2 \frac{d}{dt} y_{cm2} = Q_{1y}$$

Суммарный импульс систем подвижных элементов в проекции на ось X' равен нулю.

$$Q_{1x} + Q_{2x} = 0$$

Суммарный импульс двух систем подвижных элементов в проекции на ось Y' равен удвоенному импульсу одной из систем подвижных элементов.

$$Q_{1y} + Q_{2y} = 2 Q_{1y}$$

Сумма моментов импульсов двух систем подвижных элементов равна нулю

$$K_{1z} + K_{2z} = 0$$

Как уже упоминалось выше (Рис. 3), перемещение центра масс системы подвижных элементов в системе координат $X'O'Y'$ можно сравнить с перемещением центра масс маятника переменной длины $r(t)$ и переменной массы $M_{12}(t)$. Для случая двух систем подвижных элементов, перемещение их общего центра масс можно представить как возвратно-поступательное движение тела переменной массы по одной координате. (Рис. 15).

То есть, механическая система, состоящая из двух систем подвижных элементов, обладает одной степенью свободы.

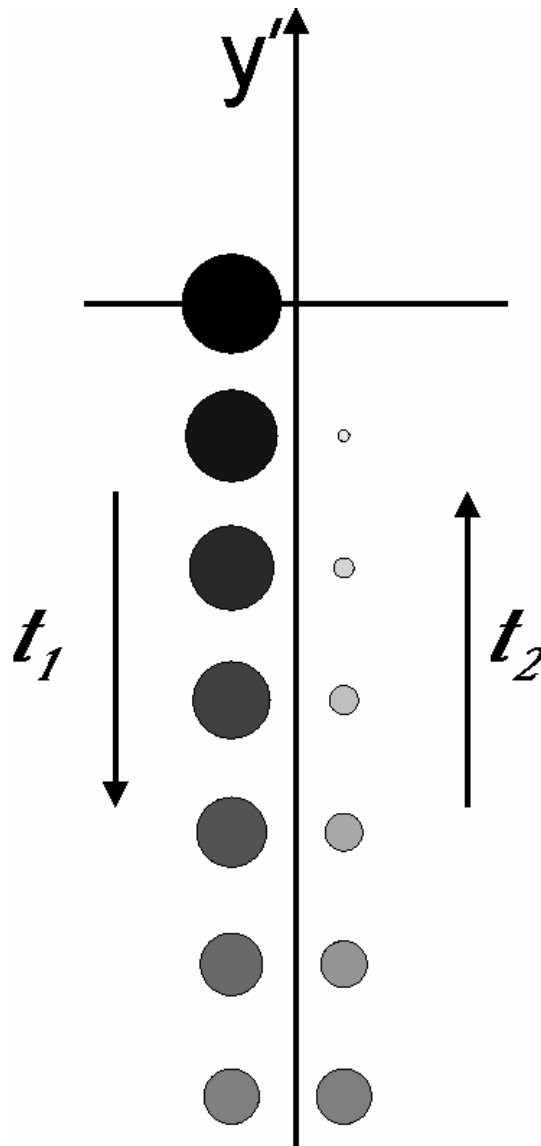


Рис. 15

В течение первого полупериода $0 < t_1 < \approx \frac{5\pi}{4\omega}$ происходит уменьшение массы двух систем подвижных элементов. При этом координата y'_{12} (центр масс систем подвижных элементов) уменьшается.

В течение второго полупериода $\frac{5\pi}{4\omega} \approx < t_2 < \frac{2\pi}{\omega}$, координата y'_{12} возрастает, но масса M_{12} продолжает уменьшаться до нулевого значения. $t_1 \neq t_2$

6. Организация непрерывной (квазинепрерывной) работы.

Назовем механическую систему, состоящую из двух систем подвижных элементов, совершающих зеркально симметричное повторяющееся движение по специальной траектории, Силовым Элементом – сокращенно «СЭ».

СЭ можно объединять в группы для совместной работы.

6.1. Группа СЭ с фазовым сдвигом, равным нулю.

Допустим, мы объединили в группу n силовых элементов.

У нас получится замкнутая механическая система, состоящая из массивного тела (корпуса) M_c и группы СЭ, суммарной массой в момент $t_0 = 0$, равной

$$M_{nc} = \sum_1^n M_{1c}$$

Если начало рабочего цикла у всех СЭ, входящих в группу, совпадает, т.е. фазовый сдвиг у всех СЭ равен нулю, то за рабочий цикл вся механическая система переместится на расстояние (согласно (24) и (32)):

$$y_{\max} = \frac{k}{2\pi} \frac{(n M_{1c}) R}{(M_c + (n M_{1c}))} \quad (42)$$

, где: $k \approx 2.437653393$

После завершения рабочего цикла каждый СЭ необходимо снова привести в исходное состояние, т.е. произвести действия, перечисленные в начале пункта 0.

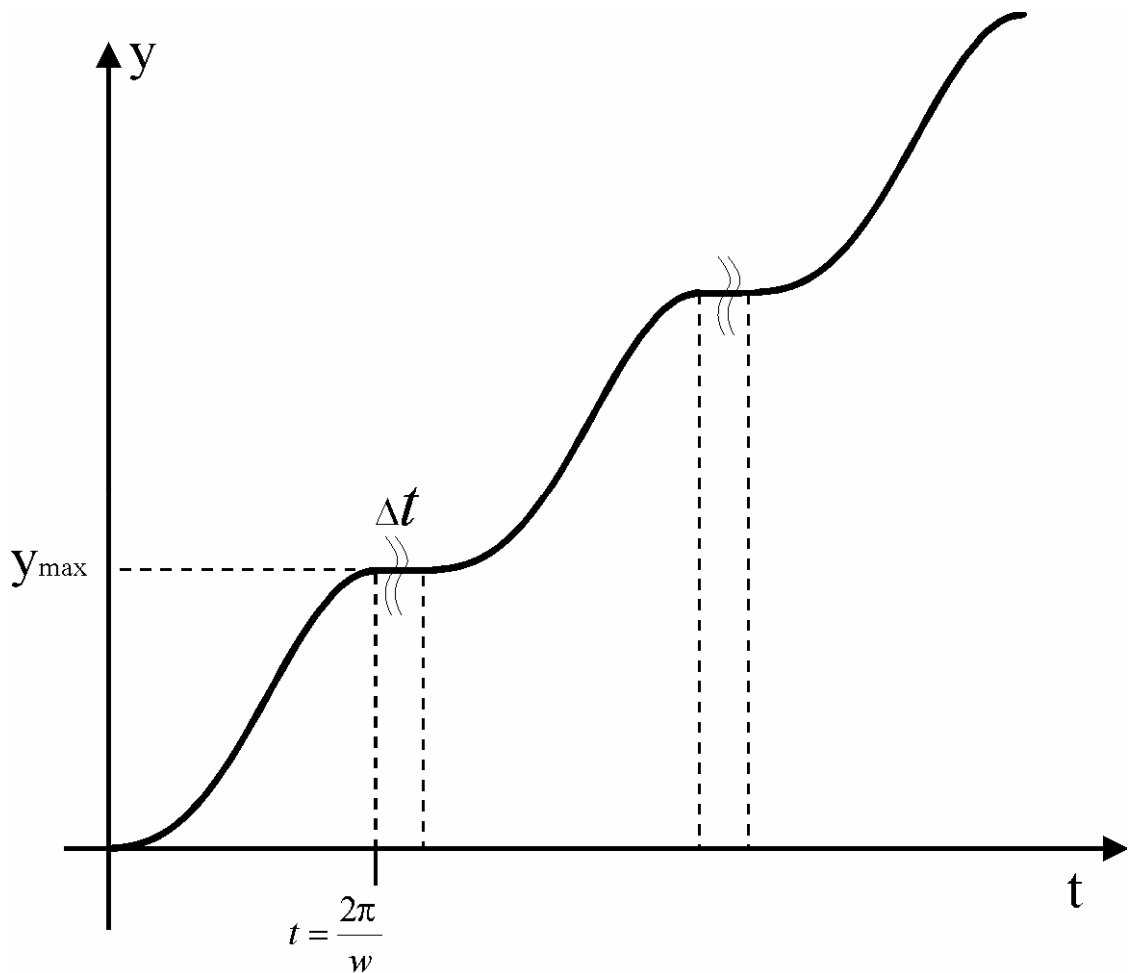


Рис. 16

График перемещения подобной системы представлен на Рис. 16. Интервалы времени Δt на графике определяют время восстановления группы СЭ в исходное состояние.

6.2. Группа СЭ с фазовым сдвигом, отличным от нуля.

Можно организовать работу группы СЭ таким образом, что начало рабочего цикла у каждого СЭ будет отличаться от предыдущего СЭ.

Допустим, фазовый сдвиг у каждого СЭ из группы n элементов будет равен

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

т.е., когда первый СЭ из группы начинает рабочий цикл, последний СЭ завершает его.

На Рис. 17 представлена условная схема работы группы СЭ из 8 элементов.

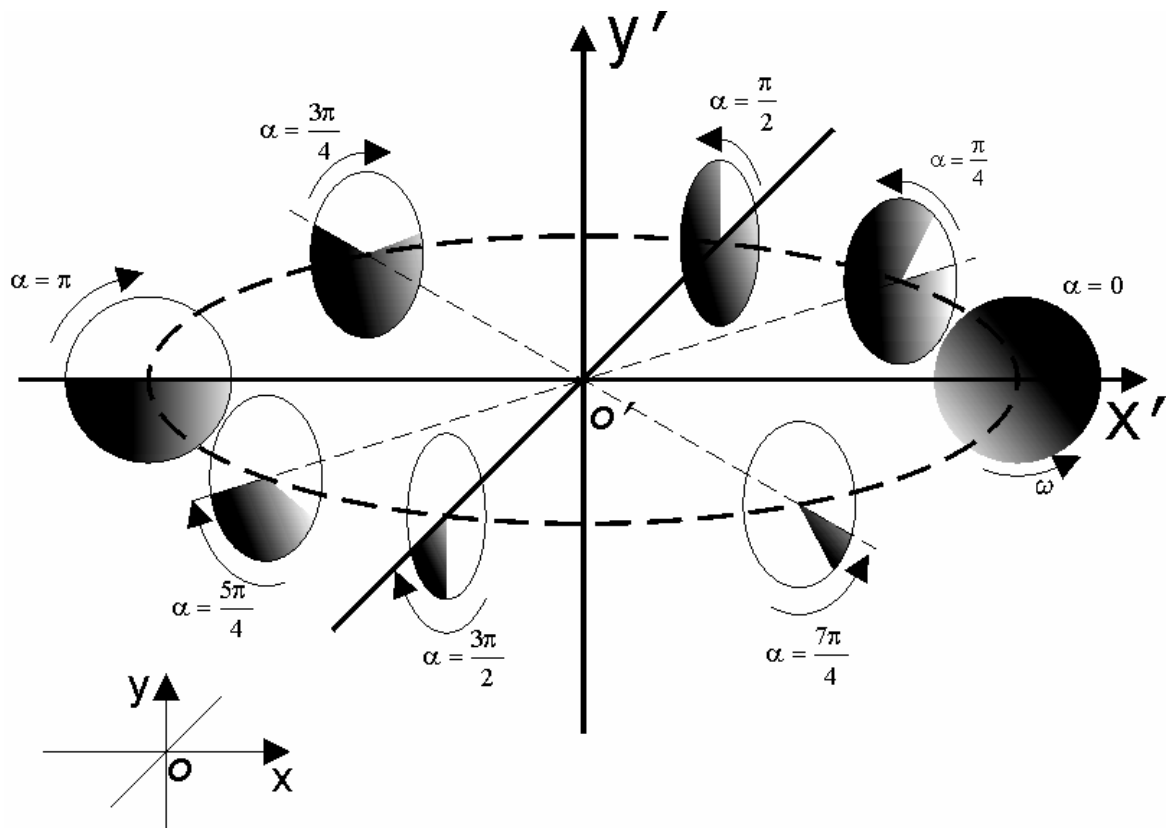


Рис. 17

Допустим, что каждый СЭ после завершения рабочего цикла сразу начинает новый рабочий цикл. Время восстановления СЭ в рабочее состояние опущено для упрощения.

Масса подвижных элементов, участвующих в движении в системе из n СЭ:

$$M_{1n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{M_{1c} \left(2\pi - \alpha - \frac{2k\pi}{n} \right)}{2\pi} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

При большом числе n , т.е., соответственно, при малом $\Delta\alpha$, можно считать массу подвижных элементов, участвующих в движении, постоянной.

Среднее значение этой массы:

$$M_{1n} = n \frac{M_{1c}}{2}$$

, где M_{1c} — масса одного СЭ.

На Рис. 18 представлен график изменения масс подвижных элементов системы из 4 СЭ.

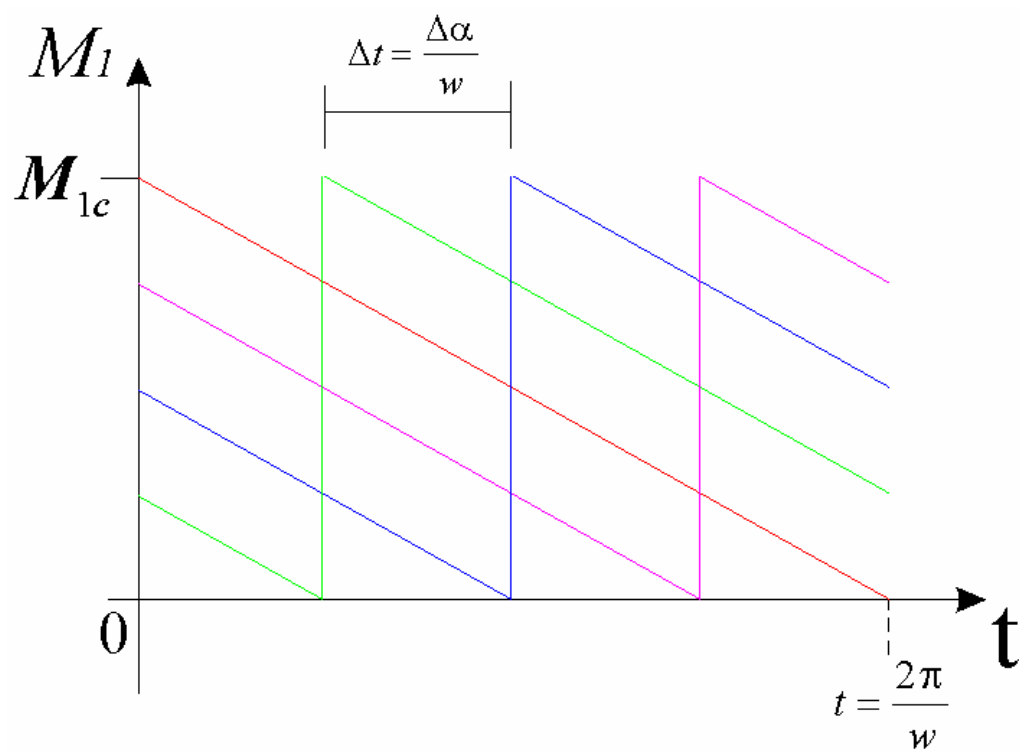


Рис. 18

Центр масс каждого из СЭ перемещается по зависимости (8).

$$y'_{li} = \frac{R (1 - \cos(\alpha + i \frac{2\pi}{n}))}{2\pi - (\alpha + i \frac{2\pi}{n})}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

График перемещения центров масс подвижных элементов системы из 4 СЭ представлен на Рис. 19.

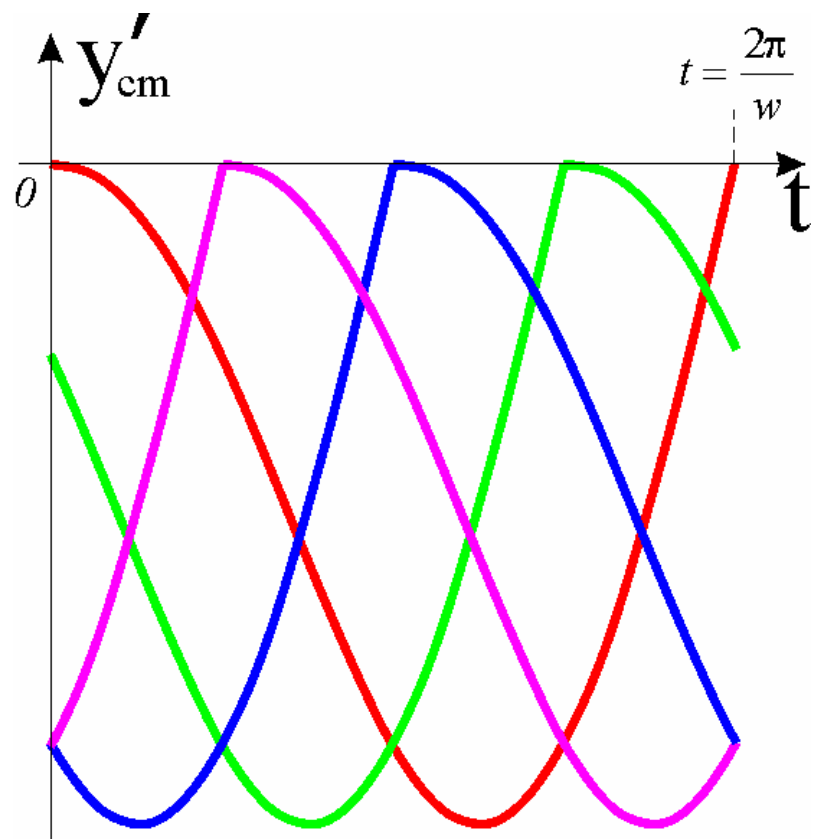


Рис. 19

Сумма количеств движений СЭ в системе координат, связанной с замкнутой механической системой, определяется выражением:

$$Q_{1n} = \sum_{i=1}^n M_{li} V_{lyi} \quad (43)$$

На Рис. 20 представлен график изменения количества движения системы СЭ с фазовым сдвигом.

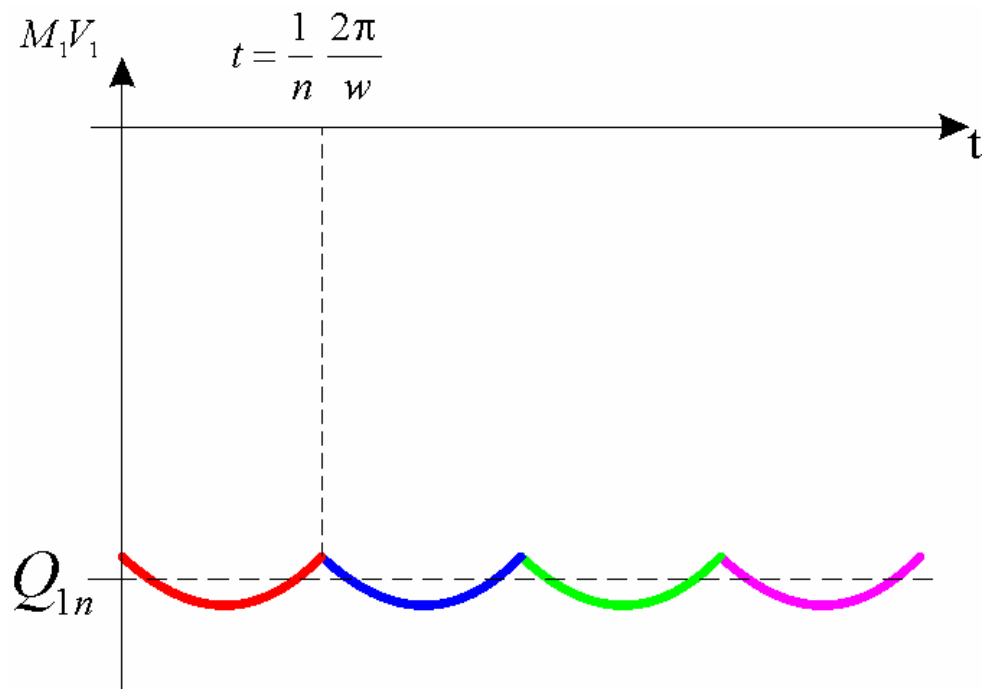


Рис. 20

Среднее значение суммарного импульса СЭ в подвижной системе координат будет: (45)

$$Q_{In} = -\frac{1}{4} \frac{M_{lc} w R (\ln(2) + \ln(\pi) - \text{Ci}(2\pi) + \gamma) n}{\pi^2}$$

Из закона сохранения импульса замкнутой механической системы следует:

$$(M_c + n M_{lc}) \left(\frac{d}{dt} y_{0n}(t) \right) + Q_{In} + M_{In} \left(\frac{d}{dt} y_{0n}(t) \right) = 0 \quad (44)$$

где:

$M_c + M_{1n}$ — масса части механической системы, с центром масс которой связано начало отсчета подвижной системы координат $X'O'Y'$.

$\frac{d}{dt} y_{0n}(t)$ — скорость подвижной системы координат $X'O'Y'$ в проекции на ось Y неподвижной системы координат XOY .

M_{1n} — масса подвижных элементов СЭ (43).

Часть выражения:

$$Q_{1n} + M_{1n} \left(\frac{d}{dt} y_{on}(t) \right) \text{ — определяет импульс СЭ в неподвижной системе}$$

координат XOY .

Решение дифференциального уравнения (44) относительно $y_{on}(t)$, с учетом начальных условий:

$y_{on}(0) = 0$ (начальная скорость системы равна нулю),
дает следующий результат:

$$y_{0n}(t) = \frac{1}{4} \frac{R w M_{lc} n (\ln(2) + \ln(\pi) - \text{Ci}(2\pi) + \gamma) t}{\pi^2 (M_c + M_{lc} n)} \quad (46)$$

Анализ выражения (46) показывает, что система из n СЭ, начало рабочего цикла каждого из которых отличается от начала рабочего цикла предыдущего СЭ на

величину $\Delta t = \frac{1}{n} \frac{2\pi}{w}$, движется равномерно (Рис. 21). На Рис. 21 красным цветом

изображена траектория движения системы из **трех** СЭ. (При $n \rightarrow \infty$, кривая $y_{0n}(t)$ на Рис. 21 приближается к прямой.)

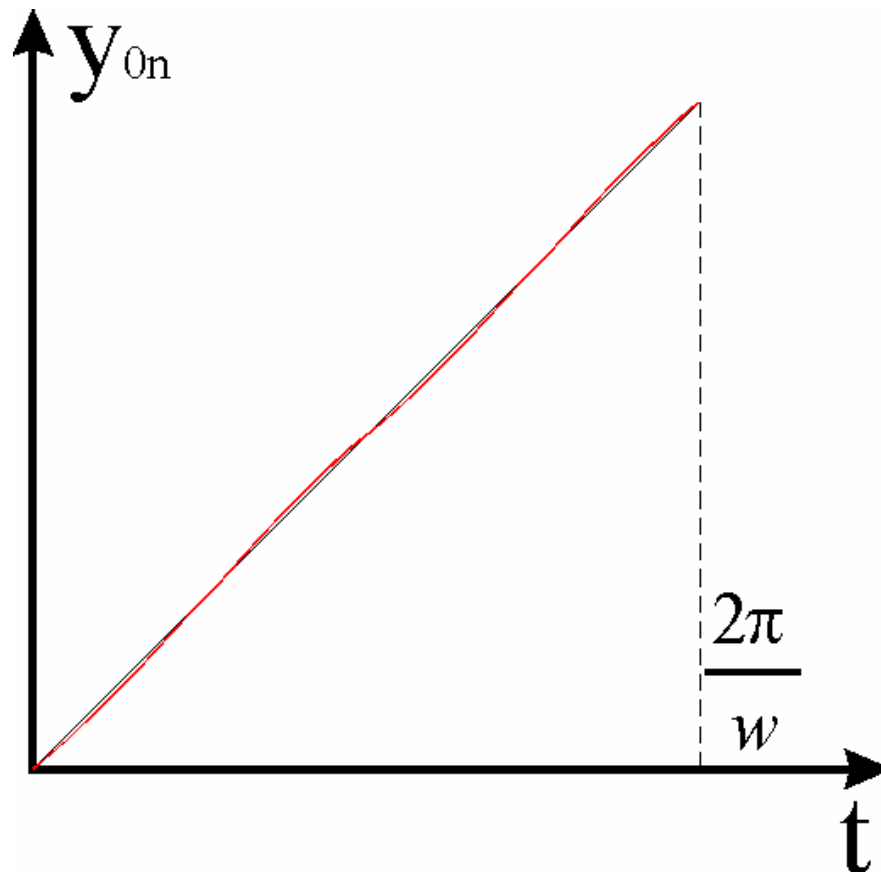


Рис. 21

Расчет сделан из условия, что каждый СЭ после завершения рабочего цикла сразу начинает новый рабочий цикл. Время восстановления СЭ в рабочее состояние опущено для упрощения.

Система движется равномерно только при $w \neq 0$.

Скорость всей замкнутой системы есть производная по времени от координаты, определяющей центр масс системы:

$$V_{y0n} = \frac{d}{dt} y_{0n}(t)$$

$$V_{y0n}(t) = \frac{1}{4} \frac{R w M_{lc} n (\ln(2) + \ln(\pi) - \text{Ci}(2\pi) + \gamma)}{\pi^2 (M_c + M_{lc} n)} \quad (47)$$

Ускорение системы, как производная по времени от скорости, **равно нулю**:

$$a_{0n} = \frac{d}{dt} V_{y0n} = 0$$

То есть, в **любой момент времени система перемещается без ускорения**.

Можно рассчитать силу, с которой система СЭ способна перемещать всю механическую систему.

Сила, развиваемая одним СЭ определена в (38) :

Для группы СЭ с фазовым сдвигом суммарная сила:

$$F_{In} = \sum_{k=0}^{n-1} F_1 \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

При большом количестве СЭ в группе, можно принять среднее значение суммарной силы:

$$F_{cp} = \left(\pi I + \ln(\pi) + \ln(2) - Ci(-2\pi) + \gamma \right) \frac{w^2 R}{4\pi^2} n M_{1c} \quad (48)$$

$$F_{cp} \approx 2.43765 \times \frac{w^2 R}{4\pi^2} n M_{1c}$$

По аналогии с гироскопами, у которых гироскопический момент есть результат кориолисовых сил инерции, у СЭ **сила перемещения есть результат центростремительных сил инерции**.

При непрерывной групповой работе каждый СЭ изменяет свою кинетическую энергию (39).

За единицу времени, количество «потерянной» энергии равно количеству энергии, переданной СЭ для восстановления. При большом n и непрерывном восстановлении СЭ, можно считать работу по восстановлению СЭ равномерной.

Мощность, необходимая для восстановления СЭ в рабочее состояние:

$$N = \frac{1}{8\pi} n M_{1c} w^3 R^2 \quad (49)$$

Примечание: Значение мощности найдено из условия, что элементы подвижных систем СЭ полностью останавливаются по завершении рабочего цикла. В реальных устройствах это делать нецелесообразно. Рекомендуется изменять скорость подвижных элементов только по одной координате.

В таком случае, можно использовать запас кинетической энергии подвижной системы для перевода СЭ в рабочее состояние. При этом значение (49) будет значительно меньше.

7. Силовые элементы с нарастающей массой подвижных элементов.

Задача, изображенная на Рис. 1 может быть несколько видоизменена.

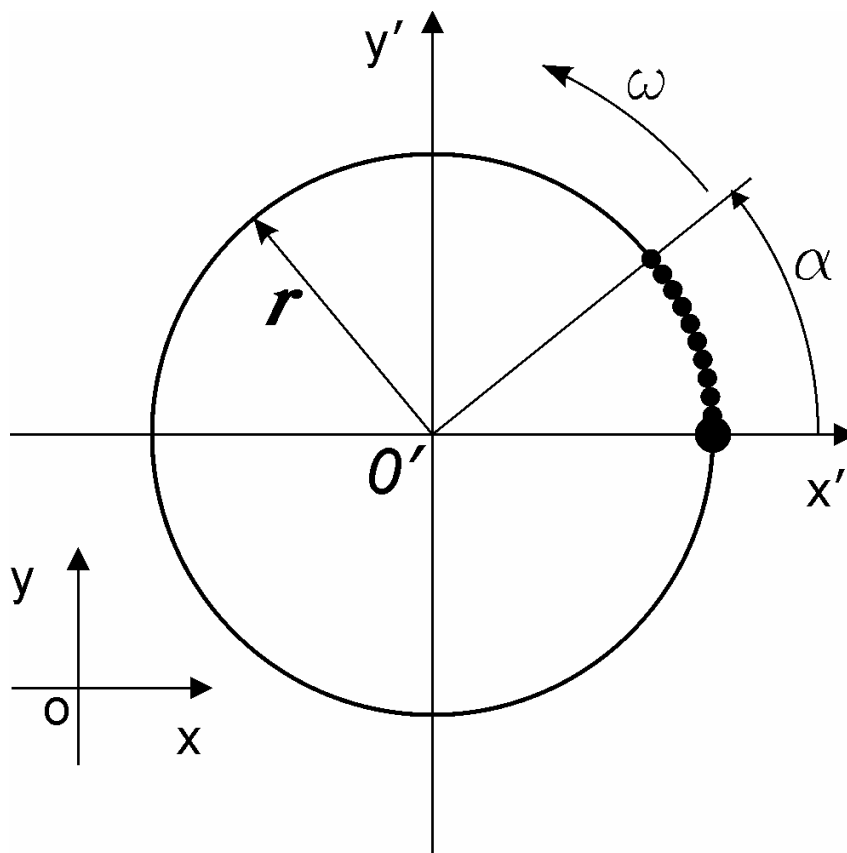


Рис. 22

Вокруг центра масс массивного тела M_c , по окружности радиуса R перемещается с постоянной скоростью система подвижных элементов. Элементы выдвигаются из некоторого «источника» суммарной массой M_{lc} (в начальный момент времени), связанного с телом M_c . Система тел распределена **непрерывно** и **равномерно**.

Через время $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ после начала выдвижения элементов, т.е. после завершения рабочего цикла, вся траектория движения подвижных элементов будет заполнена этими элементами.

Для того, чтобы повторить рабочий цикл, **не нарушая положения центра масс всей системы**, необходимо одновременно и равномерно переместить подвижные элементы в точку, из которой элементы выдвигаются на рабочую траекторию.

За рабочий период замкнутая механическая система, изображенная на Рис. 22 переместится так же, как и система на Рис. 1, на расстояние

$$y_{c \max} = \frac{k}{2\pi} \frac{M_{lc} R}{(M_c + M_{lc})}, \text{ где}$$

$$k = (-Ci(2\pi) + \gamma + \ln(2) + \ln(\pi)) \approx 2.437663393$$

$$y_{c \max} = 0.38796 \frac{M_{lc}}{(M_c + M_{lc})} R \quad (\text{см. формулу (23), (24)})$$

Соответствующие графики перемещения центра масс корпуса системы и центра масс всей системы в целом приведены на **Рис. 23** и **Рис. 24**.

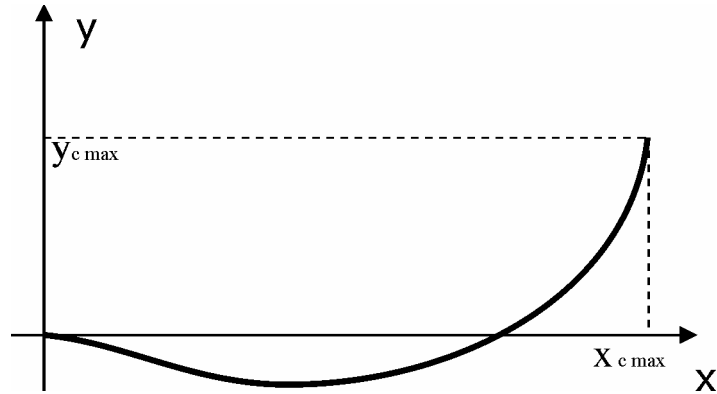


Рис. 23

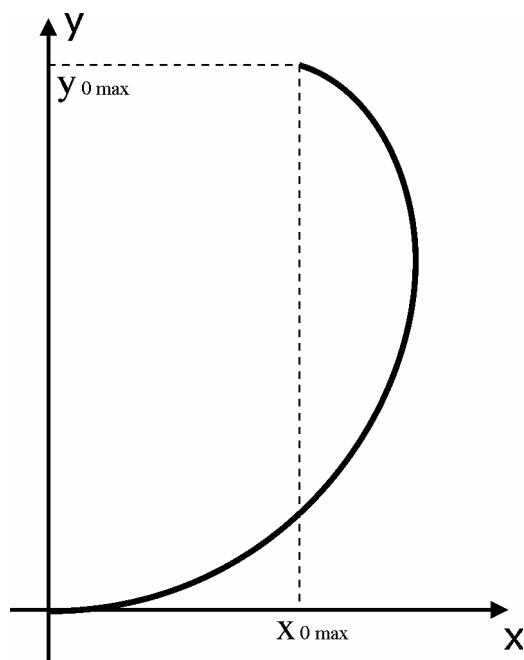


Рис. 24

8. Материалы для систем подвижных элементов.

В качестве подвижных элементов в СЭ могут использоваться различные материалы различных фазовых состояний — твердые, жидкие, газообразные.

Организация траектории перемещения подвижных элементов может быть также различная, исходя из свойств вещества подвижных элементов.

9. *Восстановление силовых элементов в рабочее состояние.*

На **Рис. 25** представлена схема восстановления СЭ в рабочее состояние. На рисунке:

- а-б) — Рабочий цикл. Подвижные элементы собираются в конечной точке траектории;
- в) — Перемещение собранных подвижных элементов в центр траектории;
- г-д) — Размещение подвижных элементов по рабочей траектории и придание им скорости.

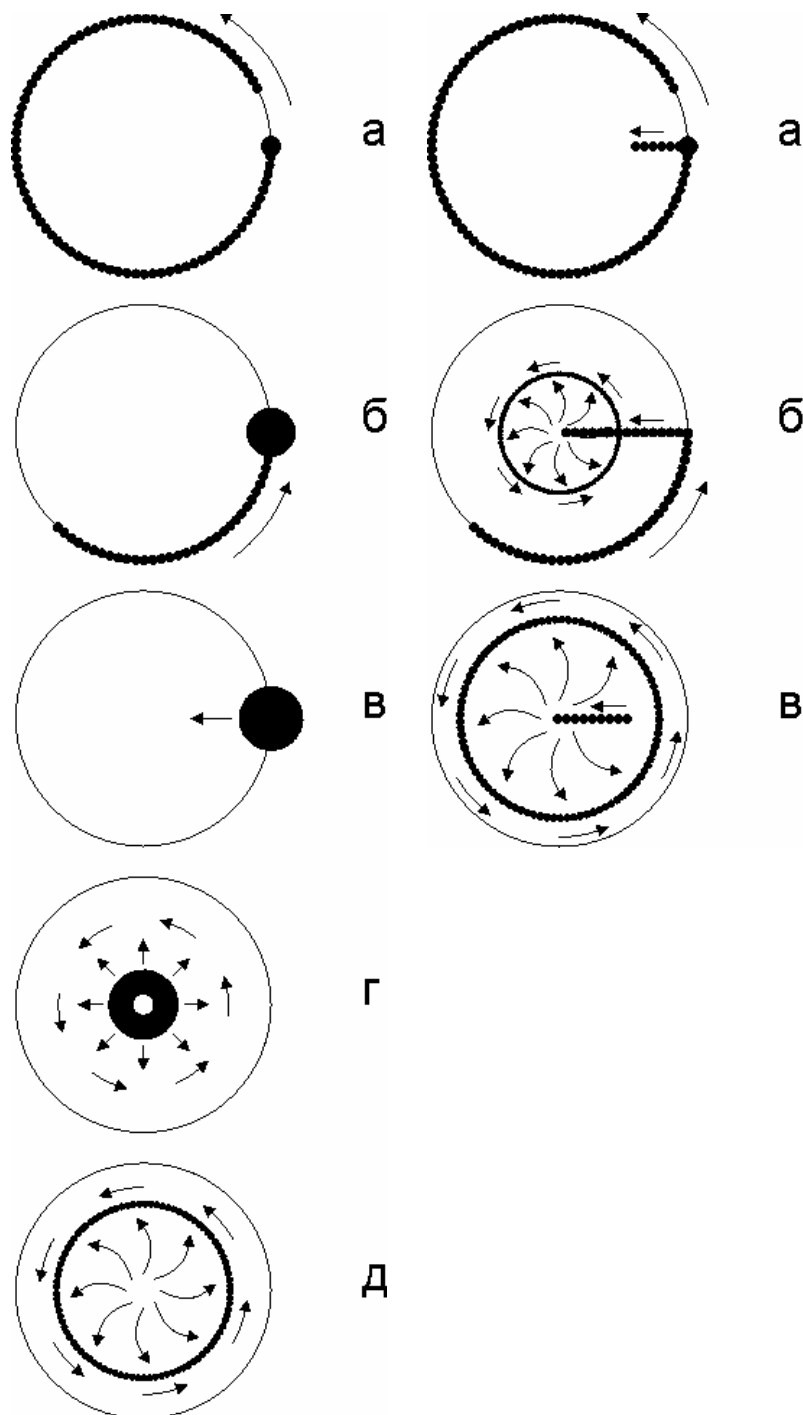


Рис. 25

Рис. 26

Для уменьшения времени восстановления СЭ и для сохранения части кинетической энергии подвижных элементов, можно производить вывод подвижных элементов на рабочую траекторию во время рабочего цикла (**Рис. 26**). В таком случае, практически сразу по завершении рабочего цикла можно начинать новый рабочий цикл.

На Рис. 25 и Рис. 26 представлены варианты восстановления СЭ с уменьшением массы подвижных элементов. Для СЭ с увеличением массы подвижных элементов (Рис. 22) принципы восстановления практически такие же, только меняется направление сбора и рассредоточения подвижных элементов.

Существует возможность объединения в один силовой блок СЭ с возрастанием (\uparrow) и уменьшением (\downarrow) масс подвижных элементов (Рис. 27).

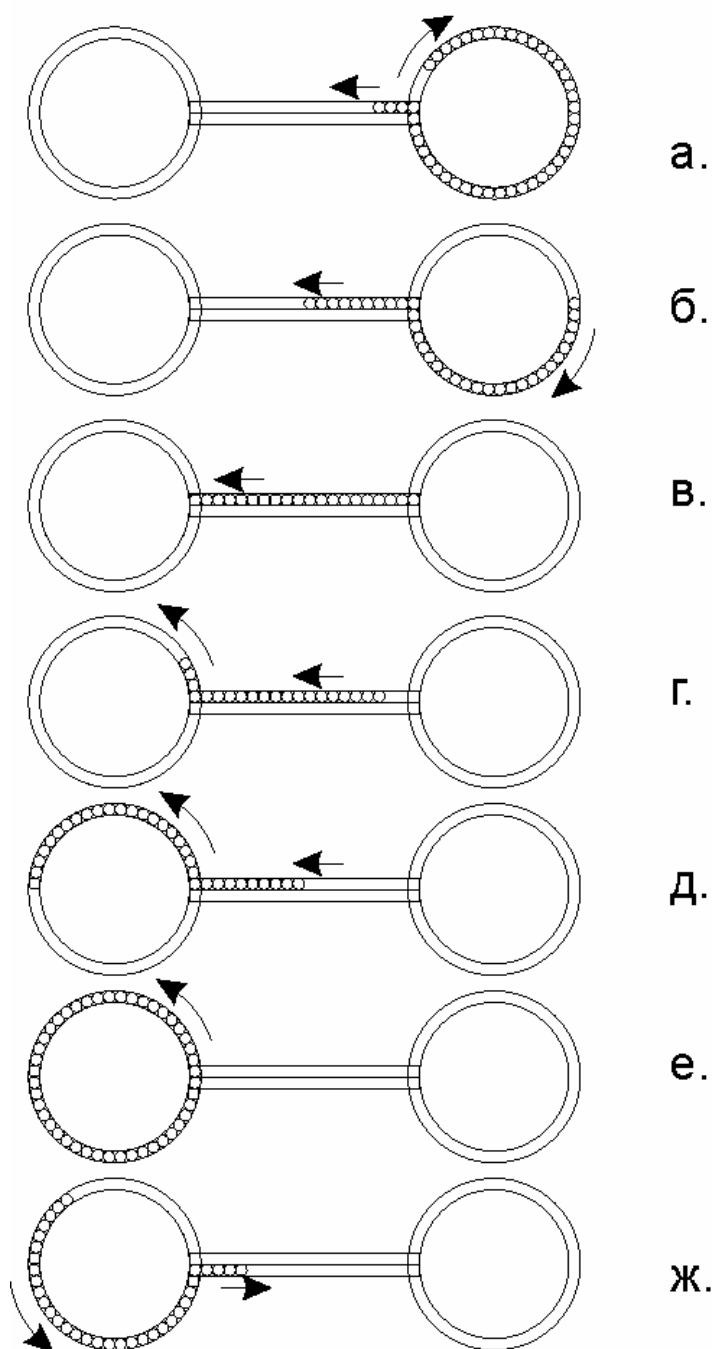


Рис. 27

На Рис. 27:

- а-б) — правая часть СЭ (на рис.) работает, как СЭ \downarrow ;
- в) — переход подвижных элементов;
- г-д-е) — левая часть СЭ работает, как СЭ \uparrow ;
- е-ж) — левая часть СЭ работает, как СЭ \downarrow , переход к а).

Следует сразу оговориться, что такое объединение возможно только: либо для одиночного СЭ, либо для группы СЭ с нулевым фазовым сдвигом. Поскольку

суммарный импульс подвижных элементов в СЭ \uparrow и в СЭ \downarrow , если их фазы равны между собой, равен нулю.

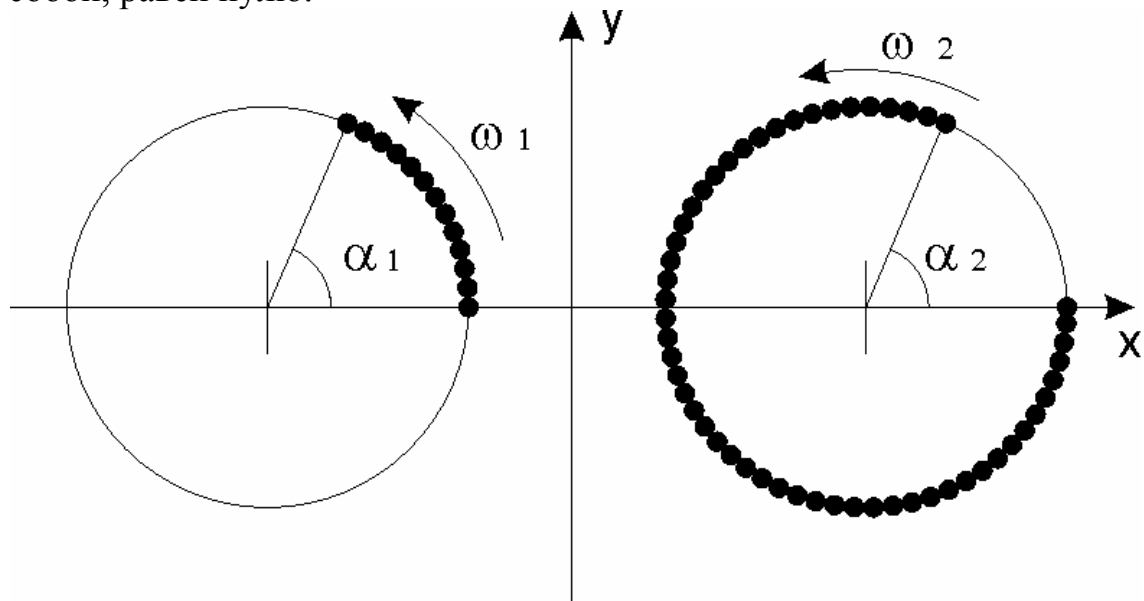


Рис. 28

На Рис. 28 представлено совмещение СЭ \uparrow и СЭ \downarrow с одинаковой фазой. При $\omega_1 = \omega_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ количество движения двух систем подвижных элементов равно количеству движения одной, двигающейся по окружности, равномерно распределенной массе.

$$Q_{\alpha 1 \uparrow} + Q_{\alpha 2 \downarrow} = Q_{\alpha = 2\pi} = 0$$

10. *Практическое применение.*

Силовые элементы, по отдельности или объединенные в группы, могут использоваться в качестве движителей любых устройств для перемещения в любых условиях и средах.

Материальная система, перемещающаяся с помощью СЭ, будет обладать очень высокой маневренностью, поскольку кинетическое состояние системы в процессе движения не изменяется.

Пример.

Материальная система общей массой 1000 кг включает в себя 10 СЭ с фазовым сдвигом.

На долю всех СЭ отведено 10% от общей массы системы.

Радиус траектории СЭ равен 1 м.

Определить минимальные кинематические характеристики СЭ для отрыва всей материальной системы от поверхности Земли.

Решение.

Масса одного СЭ:

$$M_{1c} = \frac{1}{10} \times 0.1 \times M_0 = 10 \text{ кг}$$

Вес всей системы у поверхности Земли:

$$P_0 = M_0 g \approx 9800 H$$

Из (48):

$$w = 2\pi \sqrt{\frac{F_{cp}}{2.43766 \times n M_{lc} R}}$$

$$w = 2\pi \sqrt{\frac{9800}{2.43766 \times 10 \times 10 \times 0.5}} \approx 56 \frac{рад}{с}$$

$$w = 56 \frac{рад}{с} \approx 9 с^{-1} \approx 550 мин^{-1}$$

Мощность, необходимая для непрерывной работы всех СЭ, определяется из (49).

$$N = \frac{1}{8\pi} n M_{lc} w^3 R^2$$

$$N = \frac{1}{8\pi} \times 10 \times 10 \times 56^2 \times 0.5^2 \approx 170\,000 \text{ Вт} = 170 \text{ кВт}$$

Это максимальное значение мощности. В реальных устройствах она должна быть значительно меньше. (См. примечание к формуле (49)).

Скорость системы при отсутствии сил тяжести определяется из (47):

$$V_0 \approx 0.17 \frac{M}{с}$$

Примечание.

Расчеты в данном примере произведены очень приближенно, поскольку не учитываются реальные динамические и геометрические характеристики СЭ и методы восстановления СЭ в рабочее состояние.

Литература:

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. — С-П: , 1998.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. — С-П: 1998.
3. Савельев И.В. Курс физики. — М: 1989.

Бутов С.В.

10 декабря 2006 г.