ИСААК, ТЫ ПРАВ
ИЛИ ИНТИМНАЯ СТОРОНА ОДНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМУЛЫ

Размышления по поводу статей С.В.Бутова «О возможности безопорного перемещения» и «Аналогия между вращательным и поступательным движениями» на http://varipend.narod.ru

В статьях делается попытка обосновать возможность такого перемещения механической системы ***под действием только внутренних сил*** из состояния покоя, в результате которого ее центр масс получает некоторое перемещение, отличное от нуля. Если обозначить начальные координаты k-й точки x_k^0, y_k^0, z_k^0, а конечные x_k^1, y_k^1, z_k^1, то в соответствии с определением центра масс в результате такого перемещения будет выполнено по крайней мере одно из соотношений

$$\sum m_k\left(x_k^1 - x_k^0\right) \neq 0\,,\ \sum m_k\left(y_k^1 - y_k^0\right) \neq 0\,,\ \sum m_k\left(z_k^1 - z_k^0\right) \neq 0\,. \tag{1}$$

При этом автор не собирается отказываться от закона сохранения импульса (количества движения)

$$\sum m_k \vec{v}_k = const. \tag{2}$$

Если движение начинается из состояния покоя, то

$$\sum m_k \vec{v}_k = 0.$$

В проекциях на координатные оси

$$\sum m_k \frac{dx_k}{dt} = 0, \qquad \sum m_k \frac{dy_k}{dt} = 0, \qquad \sum m_k \frac{dz_k}{dt} = 0,$$

откуда

$$\sum m_k x_k = const., \Rightarrow \sum m_k x_k^1 = \sum m_k x_k^0 \Rightarrow \sum m_k\left(x_k^1 - x_k^0\right) = 0\,, \tag{3}$$

что находится в противоречии с (1). Аналогичные соотношения справедливы и в отношении других координатных осей.

Равенство (3) означает, что за счет внутренних сил можно осуществить не любые движения $x_k = f_k(t), \quad y_k = \ldots.$, а только такие, при которых $\sum m_k\left[f_k(t_1) - f_k(t_0)\right] = 0,$ то же для осей y и z.

Автор статей утверждает, что ему удалось найти такое движение (такой набор функций $x_k = f_k(t), \quad y_k = \ldots.$), что выполняются и соотношения (1), и соотношения (3), откуда, между прочим, следует, что $0 \neq 0$.

Выводы автора основаны на вычислении количества движения механической системы по формуле $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, где $M = \sum m_k$ - масса всей системы, $\vec{v}_C$ - скорость ее центра масс. Эта формула выводится во всех учебниках и часто используется при решении разнообразных задач. Поэтому полезно еще раз проследить ее происхождение и, возможно, несколько неожиданно, установить пределы ее применимости, о которых в распространенных учебниках как раз ничего не говорится.

Согласно определению центра масс для произвольной механической системы

$$M\vec{r}_C = \sum m_k \vec{r}_k\,,$$

где $M = \sum m_k$ - масса всей системы, $\vec{r}_C$ - радиус-вектор ее центра масс.

Допуская возможность изменения масс точек системы, дифференцируем обе части по времени и получаем (точка над переменной означает ее дифференцирование по времени)

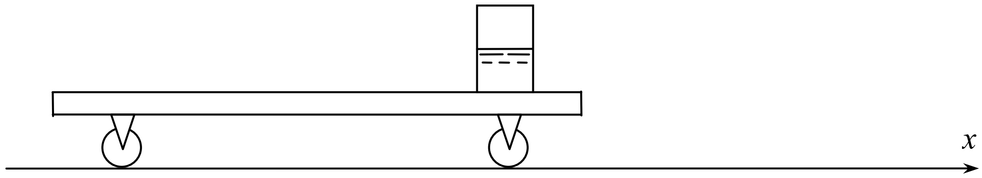
$$M\dot{\vec{r}}_C + \dot{M}\vec{r}_C = \sum m_k \dot{\vec{r}}_k + \sum \dot{m}_k \vec{r}_k\,,$$

откуда выражаем количество движения системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \dot{\vec{r}}_k = M\dot{\vec{r}}_C + \dot{M}\vec{r}_C - \sum \dot{m}_k \vec{r}_k = M\vec{v}_C + \dot{M}\vec{r}_C - \sum \dot{m}_k \vec{r}_k \ .$$

Как видим, привычная формула $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ справедлива только в случае системы постоянного состава ($\dot{m}_k = 0 \Rightarrow \dot{M} = 0$).

Пусть, например, в резервуар, находящийся на покоящейся платформе, вертикаль-



ной струей подается вода. По мере наполнения резервуара масса содержащейся в нем воды увеличивается и центр масс системы, состоящей из платформы и резервуара вместе с его содержимым, перемещается вправо по оси *x* (см. рисунок). При этом $v_C = \dot{x}_C \neq 0$. В то же время ни одна точка системы не движется по горизонтали ($x_k = const.$), откуда

$$Q_x = \sum m_k v_{kx} = \sum m_k \dot{x}_k = 0 \neq M v_{Cx} \ .$$

Можно еще нагляднее показать нелепость вывода, к которому может привести формула $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, если вспомнить, что состав рассматриваемой механической системы устанавливается в каждом конкретном случае не каким-либо законом природы или теоремой, а определяется целесообразным произволом проектировщика. Пусть в системе, изображенной на рисунке, количество жидкости постоянно и все точки системы неподвижны. Определим подсистему, состоящую из платформы и резервуара, заполненного до уровня $h(t)$. Таким образом, если только функция $h(t)$ возрастает, центр масс этой подсистемы движется вправо. Вторая подсистема – оставшаяся жидкость – неподвижна, как, впрочем, и вся система. Сложив количества движения двух подсистем, вычисленные по формуле $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, снова придем к нелепому выводу о том, что количество движения покоящейся системы не равно нулю.

Если система постоянного состава рассматривается как объединение двух подсистем 1 и 2, обменивающихся веществом, то для каждой из них

$$\vec{Q}_1 = \sum m_{k1} \dot{\vec{r}}_{k1} = M_1 \dot{\vec{r}}_{C1} + \dot{M}_1 \vec{r}_{C1} - \sum \dot{m}_{k1} \vec{r}_{k1} \ ,$$

$$\vec{Q}_2 = \sum m_{i2} \dot{\vec{r}}_{i2} = M_2 \dot{\vec{r}}_{C2} + \dot{M}_2 \vec{r}_{C2} - \sum \dot{m}_{i2} \vec{r}_{i2} \ ,$$

причем, если вещество подсистемы 2 в точке $\vec{r}_{i2}$ «перетекает» в подсистему 1, то для этой точки $\vec{r}_{i2} = \vec{r}_{k1}$, $\dot{m}_{k1} = -\dot{m}_{i2}$; кроме того, поскольку масса всей системы остается постоянной, $M = M_1 + M_2 = const.$, $\dot{M}_1 = -\dot{M}_2$. Отсюда, складывая предыдущие равенства, найдем количество движения всей системы

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = M_1 \dot{\vec{r}}_{C1} + M_2 \dot{\vec{r}}_{C2} + \dot{M}_2 (\vec{r}_{C2} - \vec{r}_{C1}) = M_1 \vec{v}_{C1} + M_2 \vec{v}_{C2} + \dot{M}_2 (\vec{r}_{C2} - \vec{r}_{C1}) \ .$$

В статье количество движения вычисляется по неверной формуле $\vec{Q} = M_1 \vec{v}_{C1} + M_2 \vec{v}_{C2}$, в которой отсутствует член $\dot{M}_2 (\vec{r}_{C2} - \vec{r}_{C1})$. Отсюда и происходит нарушение закона сохранения количества движения. Ведь автор требует, чтобы сохранялось не количество движения, а совсем другая величина. Кроме того, ордината центра масс (формула (8) первой статьи) найдена с неверным знаком. Действительно, из условия задачи видно, что центр масс движущейся дуги должен находиться ниже оси x'.

Дальнейшие замечания, набранные курсивом, предполагают знакомство читателя с материалом статьи «О возможности безопорного перемещения», в частности, используются принятые в ней обозначения.

Как исправить ошибку? Первый путь – добавить пропущенный член. Но этот путь не очень удобен, т.к. приходится иметь дело с несколько громоздкими выражениями, которые, впрочем, сворачиваются к довольно простому виду (см. ниже). Второй путь – прямое вычисление количества движения движущейся дуги и твердого корпуса вместе со сконденсированной на нем материальной точкой. Количество движения элемента дуги в движении относительно корпуса $dq'_x = -\rho R^2 \dot{\alpha} \sin\varphi d\varphi$, $dq'_y = \rho R^2 \dot{\alpha} \cos\varphi d\varphi$, *где* φ *- угол, определяющий положение элемента относительно оси* x', ρ *- линейная плотность дуги. Отсюда проекции относительного количества движения дуги равны*

$$Q'_x = -\rho R^2 \dot{\alpha} \int_{\alpha}^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = \rho R^2 \dot{\alpha}(1 - \cos\alpha)$$

$$Q'_y = \rho R^2 \dot{\alpha} \int_{\alpha}^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = -\rho R^2 \dot{\alpha} \sin\alpha .$$

В абсолютном движении, с учетом того что $\rho = \dfrac{M_{1C}}{2\pi R}$, *масса дуги* $M_1 = M_{1C}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)$,

$$Q_{1x} = M_{1C}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\dot{x}_C + \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}(1 - \cos\alpha),$$

$$Q_{1y} = M_{1C}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\dot{y}_C - \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}\sin\alpha .$$

Для всей системы, с учетом того что масса корпуса вместе с осевшими на нем элементами дуги равна $M_2 = M_C + \dfrac{\alpha}{2\pi}M_{1C}$, *получим*

$$Q_x = (M_C + M_{1C})\dot{x}_C + \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}(1 - \cos\alpha),$$

$$Q_y = (M_C + M_{1C})\dot{y}_C - \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}\sin\alpha .$$

Тогда требование сохранения количества движения $Q_x = Q_y = 0$ *приводит к дифференциальным уравнениям*

$$(M_C + M_{1C})\dot{x}_C + \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}(1 - \cos\alpha) = 0,$$

$$(M_C + M_{1C})\dot{y}_C - \frac{M_{1C}R}{2\pi}\dot{\alpha}\sin\alpha = 0,$$

решение которых имеет вид

$$x_C = x_{C0} - k(\alpha - \sin\alpha),$$

$$y_C = y_{C0} + k(1 - \cos\alpha),$$

где $k = \dfrac{M_{1C}}{M_C + M_{1C}} \cdot \dfrac{R}{2\pi}$.

Третий путь состоит в том, что вся система делится на части постоянной массы, т.е. на корпус M_C *и дугу с накапливающимся точечным грузом на конце* M_{1C}. *Мне этот путь представляется наиболее естественным. При этом применение формулы* $\vec{\boldsymbol{Q}} = M\vec{v}_C$ *для каждой из частей вполне законно. Все три пути приводят в точности к одному и тому же результату.*

По поводу второй статьи.

Метод аналогий может пониматься по-разному. Когда различные процессы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, то аналогия между этими процессами прослеживается на уровне точных количественных соотношений и определяется одинаковостью решений соответствующих уравнений. В этом случае метод аналогий позволяет делать точные выводы относительно протекания изучаемых процессов. Часто метод аналогий понимается шире как гносеологический принцип, позволяющий строить более или менее правдоподобные предположения на основании сходства некоторых сторон исследуемых процессов. В таком понимании он не является точным методом, прямо приводящим к окончательным результатам, а лишь подсказывает пути, по которым целесообразно вести их поиск.

Любопытная историческая параллель. Закон сохранения количества движения открыт раньше закона сохранения кинетического момента. В форме сохранения движения центра масс он установлен в начале «Начал» Ньютона (следствие IV из законов движения). Сходство рассматриваемых законов, по-видимому, привело к тому, что еще в 1862 г. французский академик Делоне в своем учебнике механики отрицал возможность вращения системы за счет внутренних сил (по аналогии с запретом на поступательное перемещение, установленным Ньютоном). Заблуждение было развеяно падающей кошкой. Серия фотографий процесса падения опубликована в 1894 г. Сегодня С.В.Бутов действительно реализуемую возможность вращения (с фактами не поспоришь – кошка в самом деле всегда приземляется на лапки) пытается перенести на поступательное перемещение.

Аналогия между поступательным и вращательным движениями определяется внешним сходством дифференциальных уравнений, выражающих теоремы о сохранении количества движения и кинетического момента (момента количества движения) при отсутствии внешних сил

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{Q}}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 0,$$

и их интегралов

$$\vec{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{const.}, \quad \vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{const.}$$

На этом, пожалуй, аналогия и заканчивается, и обнаруживаются существенные различия в следствиях из этих уравнений.

Интегрирование закона сохранения количества движения приводит к уже установленным равенствам (3)

Геометрический смысл равенства $\vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{const.}$ раскрывается в его другом названии, а именно, «Закон площадей». Прежде всего, отметим одно важное различие между величинами $\vec{\boldsymbol{Q}}$ и $\vec{\boldsymbol{L}}$. Количество движения $\vec{\boldsymbol{Q}}$ представляет собой одну векторную величину, характеризующую (отнюдь не исчерпывающе) динамическое состояние системы в данный момент. Кинетический момент $\vec{\boldsymbol{L}}$ определяется по отношению к некоторому полюсу или оси и в силу этого является, вообще говоря, функцией не только времени, но и координат (полюса). Другими словами, в каждый момент времени определено бесконечно много значений кинетического момента, по одному для каждой точки пространства. Поэтому обычно и пишут не $\vec{\boldsymbol{L}}$, а $\vec{\boldsymbol{L}}_O$ (или L_x, L_y, L_z - для моментов относительно осей).

Кинетический момент материальной точки $\boldsymbol{M}$ относительно неподвижного полюса O выражается равенством

$$\vec{\boldsymbol{l}}_O = [\vec{\boldsymbol{r}}, m\vec{v}] = \left[\overrightarrow{O\boldsymbol{M}}, m\vec{v}\right],$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение. Легко доказать (это делается в большинстве стандартных учебников, очень рекомендую «Беседы о механике» В.Л.Кирпичева, 12-я беседа), что численно кинетический момент точки относительно полюса равен удвоенному произведению массы точки на так называемую секторную скорость, т.е. площадь сектора, описываемого отрезком, проведенным из полюса в точку $\boldsymbol{M}$, за единицу времени,

$$l_O = 2m \cdot \frac{dS}{dt},$$

и направлен перпендикулярно плоскости, в которой движется этот отрезок, в ту сторону, откуда вращение отрезка видно происходящим против часовой стрелки. Ограничимся для простоты случаем движения механической системы в неподвижной плоскости xOy. Тогда закон сохранения кинетического момента можно выразить скалярным равенством

$$\sum m_k \frac{dS_k}{dt} = const.,$$

а при движении из состояния покоя – равенством

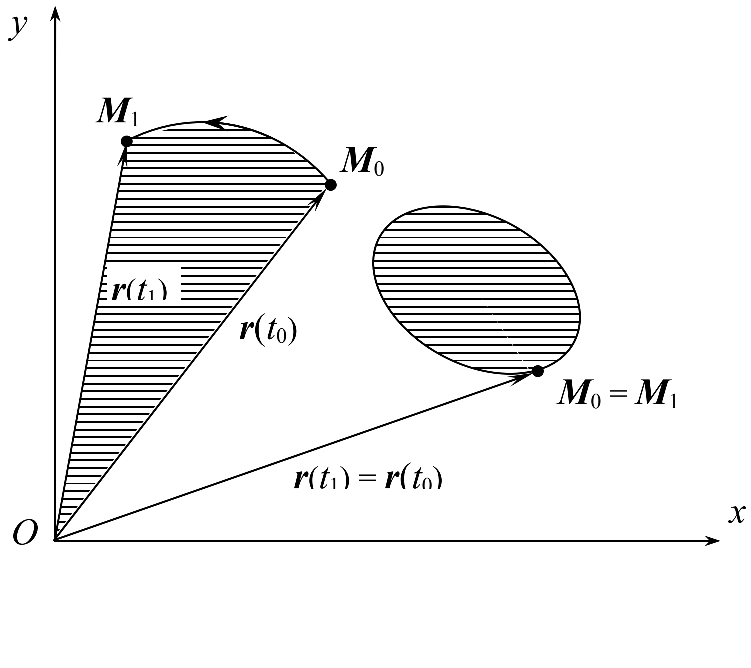
$$\sum m_k \frac{dS_k}{dt} = 0,$$

которое после интегрирования по времени от t_0 до t_1 приводит к соотношению

$$\sum m_k S_k = 0,$$

где S_k - площадь сектора, описанного радиусом-вектором k-й точки при ее движении за время от t_0 до t_1, положительная при повороте вектора против часовой стрелки, и отрицательная при повороте по часовой стрелке.

На рисунке движению точки $\boldsymbol{M}$ за время от t_0 до t_1 отвечает положительная площадь заштрихованного сектора $O\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1$. Заметим, что начальное и конечное положения точки могут совпадать (см. замкнутую траекторию на рисунке). Такому движению отвечает площадь участка плоскости, ограниченного траекторией, положительная, если она обходится точкой против часовой стрелки, и отрицательная при противоположном направлении обхода. Эта площадь не зависит от выбора полюса, а определяется только траекторией точки.



Соотношения $\sum m_k \left(x_k^1 - x_k^0\right) = 0$ и $\sum m_k S_k = 0$ несмотря на внешнее сходство по-разному характеризуют перемещение системы. Это связано с тем, что площади S_k определяются не координатами начального и конечного ее положений, а законами движения точек в течение всего промежутка от t_0 до t_1. Легко подобрать такие законы, при которых конечное положение получается из начального поворотом системы как твердого тела.

Примеры таких движений наглядно представлены в статье «Аналогия между вращательным и поступательным движениями». Однако с выводами, сделанными в статье «с помощью метода аналогий», согласиться нельзя, т.к. они ничем, кроме упомянутого сходства, не обоснованы.

Вызывает недоумение также «Примечание». Примеры поворота замкнутой механической системы за счет внутренних сил существуют не в учебных изданиях, а в жизни! И скамья Жуковского, и падающая кошка, и космонавты, да и примеры вращений, приведенные самим С.В.Бутовым в статье – вполне реальные вещи. Если в результате каких-либо перемещений элементов системы получилась система, имеющая ту же конфигурацию, что и исходная система, но повернутая относительно последней на некоторый угол, какие основания называть это иллюзией? Некоторые из таких поворотов С.В.Бутов признает реальными – другие же, приводящие к тому же конечному положению, – иллюзией. Предлагаю такой опыт. Представим себе две одинаковые системы (скамейки Жуковского или что-нибудь другое), которые могут вращаться за счет внутренних сил. Завяжем автору глаза и совершим перемещения, в результате которых обе системы окажутся в одинаковых конечных положениях. Затем снимем повязку. Как он сумеет узнать, какая из систем совершила действительный поворот, а какая – иллюзорный?

Наконец, для того, чтобы еще раз подчеркнуть разницу между уравнениями $\vec{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{const.}$ и $\vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{const.}$, заметим, что второе из них при условии, что оно справедливо для любого полюса, с необходимостью влечет первое. Обратное неверно.

Пусть O и O' - два произвольных полюса, причем $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{const.}$ и $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O'}} = \boldsymbol{const.}$ Тогда, как известно,

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O'}} = \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} + \left[\overrightarrow{O'O}, \vec{\boldsymbol{Q}}\right],$$

откуда

$$\left[\overrightarrow{O'O}, \vec{\boldsymbol{Q}}\right] = \overrightarrow{const.} \Rightarrow \left[\overrightarrow{O'O}, \vec{\boldsymbol{Q}}(t_1) - \vec{\boldsymbol{Q}}(t_0)\right] = 0 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{Q}}(t_1) = \vec{\boldsymbol{Q}}(t_0) \Rightarrow \vec{\boldsymbol{Q}}(t) = \overrightarrow{const.}$$

в силу произвольности O и O'. Аналогично убеждаемся, что из $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = 0$ при любом полюсе O следует $\vec{\boldsymbol{Q}} = 0$.

В заключение хочу обратить внимание на один технический момент, напрямую не связанный с законами природы. Если мы решаем математическую задачу отыскания некоторых функций, удовлетворяющих уравнению $\vec{\boldsymbol{Q}} = 0$, то при подстановке найденных функций в это уравнение оно должно выполняться. Иначе они по определению не будут решением задачи. В начале настоящей заметки установлена чисто математическая эквивалентность равенств $\vec{\boldsymbol{Q}} = 0$ и $\sum m_k\left(x_k^1 - x_k^0\right) = \sum m_k\left(y_k^1 - y_k^0\right) = \sum m_k\left(z_k^1 - z_k^0\right) = 0$. Последние означают неподвижность центра масс системы, но математической стороны задачи это не касается. Если найденные нами функции описывают движение, при котором центр масс движется, то уравнение $\vec{\boldsymbol{Q}} = 0$ этими функциями не удовлетворяется! В математическом смысле основной вывод статьи С.В.Бутова означает, что из $\vec{\boldsymbol{Q}} = 0$ следует $\vec{\boldsymbol{Q}} \neq 0$. Естественно, такой результат обязан насторожить любого исследователя и побудить к поиску источника недоразумения.

С.Я.Бекшаев