

М

М



Σ

Я. В. Татаринов
ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
ДИНАМИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА



Я. В. Татаринов

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1984

Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 296 с.

Книга имеет целью дать по возможности сжатое введение в предмет, включая как физические его основы, так и дифференциально-геометрические аспекты.

Нетрадиционно освещается ряд тем: кинематика, общие теоремы динамики, вывод уравнений Лагранжа, уравнение Гамильтона — Якоби. Часть материала выходит за рамки университетского курса: элементы теории линейных и квадратичных по скоростям интегралов, применение вариационных принципов, новое доказательство теоремы Дарбу о канонических координатах. В книгу включены задачи, иллюстрирующие и дополняющие теоретический материал, даны методические указания к ним.

Книга предназначена для студентов и аспирантов механико-математических и физических факультетов университетов, для преподавателей вузов.

Библиогр. 53 назв. Ил. 80.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук *В. В. Козлов*,
проф. *А. П. Маркеев*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Часть I. Аналитический курс	7
Тема 1. Предварительные соображения о наблюдении и измерении	7
Тема 2. Линейные задачи динамики точки	14
Тема 3. Сведения о фундаментальных полях	20
Тема 4. Сопоставление систем отсчета	26
Тема 5. Сохранение энергии. Простейшие модели с трением	40
Тема 6. Одномерные консервативные системы	46
Тема 7. Общие теоремы динамики	52
Тема 8. Галилеева инвариантность и ее следствия	58
Тема 9. Динамика твердого тела	63
Тема 10. Задача двух тел в разных аспектах	74
Тема 11. Уравнения Эйлера—Лагранжа	86
Тема 12. Линеаризация	97
Тема 13. Принцип экстремальности действия	101
Тема 14. Обобщенные силы и обобщенный потенциал	106
Тема 15. Техника упражнений	110
Тема 16. Ограниченная задача трех тел	124
Тема 17. Каноническая форма уравнений движения	129
Тема 18. Уравнение Гамильтона—Якоби	138
Часть II. Геометрический курс	148
§ 1. Простейшие плоские движения	148
§ 2. Центральное поле сил в плоскости	152
§ 3. Движение в пространстве	157
§ 4. Движение точки по кривой	160
§ 5. Движение по поверхности	163
§ 6. Вариационные принципы	169
§ 7. Положения равновесия	175
§ 8. Линейные интегралы	178
§ 9. Квадратичные интегралы	185
§ 10. Динамика системы свободных точек. Задача многих тел	190
§ 11. Кинематика	194
§ 12. Основные положения динамики твердого тела	202
§ 13. Принцип д'Аламбера—Лагранжа для голономных систем	211
§ 14. Качение шара (пример неголономной системы)	218
§ 15. Уравнения Лагранжа. Приведение по Раусу	222
§ 16. Уравнения Гамильтона и их интегралы	229
§ 17. Симплектическая структура и линейные гамильтоновы системы	236
§ 18. Канонические многообразия	243
§ 19. Канонические координаты	251
§ 20. Канонические преобразования и эффективное интегрирование	257
§ 21. Уровень энергии и время	272
Приложение. Механика в картинках	276
Литература	294

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга состоит из двух частей: первая написана на основе лекций, читавшихся в 1981/82 учебном году на одном из потоков отделения математики механико-математического факультета МГУ, вторая — на основе курса лекций на экспериментальном потоке факультета, читавшихся в 1978/79 учебном году.

Формально части книги независимы: их можно читать по отдельности. Но это — лишь внешняя сторона замысла книги, выражающая желание ясно разграничить два разных пути введения в предмет студентов-математиков: первая часть более элементарна и ближе к физике, вторая — существенно использует точку зрения и язык дифференциальной геометрии (это различие выразилось и в условных названиях частей: аналитический курс, геометрический курс). Изложение параллельных мест в обеих частях получилось непохожим, а большая часть материала каждой части просто не имеет параллелей в другой. Звеном, связующим оба курса, является сводка иллюстраций, которая, помимо обычной вспомогательной роли, призвана служить своеобразным зрительным резюме предмета. Читатель увидит, что подписи ко многим рисункам адресуют его к обеим частям одновременно (и даже к разным местам одной и той же части — это особенно касается изображений качественных свойств движений, которые могут быть одинаковыми у разных механических систем).

Подбор и расположение материала каждой части были обусловлены некоторыми предварительными соображениями, о которых необходимо рассказать.

Экспериментальный поток работал по учебному плану, составленному под руководством С. П. Новикова. Согласно этому плану, годовой курс механики читался в третьем и четвертом семестрах, причем первая его половина не сопровождалась семинарскими занятиями; курсу предшествовал пропедевтический семинар по механике во втором семестре. Основная рекомендация С. П. Новикова лектору была максимально подчеркнуть фундаментальные идеи предмета и его связи со смежными дисциплинами; если нужно — то продемонстрировать некоторые концепции не в виде строгой теории, а на модельных задачах. Радикально трактуя слово «экспериментальный» из названия потока, автор решил не следовать традиционному строению курса и даже включил в программу несколько свежих результатов В. В. Козлова, желая показать нетривиальные приложения вариационных

принципов механики (да и в других случаях, считая обязательным дать работу каждому вводимому понятию). С целью профилактики непонимания студентами-математиками самых простых разделов механики (мнение, что «все выводится из закона Ньютона», к сожалению, весьма заразительно) автор в динамике точки при первой же возможности начал показывать эффективность лагранжева формализма, а в динамике системы подчеркивал роль формулы изменения кинетического момента (поначалу даже постулировав ее в динамике твердого тела, которая излагалась раньше принципа д'Аламбера—Лагранжа). Большую роль в курсе играли задачи, вплетенные в его ткань; при написании книги число их было увеличено. Среди других добавлений к экспериментальному курсу хотелось бы выделить новые (как кажется автору) доказательства теоремы Дарбу и леммы Каратеодори, а также пример системы с неинволютивным набором интегралов (предложен Е. И. Кугушевым в 1972 г.).

Готовясь к чтению нового курса лекций три года спустя, автор исходил из того, что курс на отделении математики, читаемый в пятом, шестом и седьмом семестрах,—первый в ряду естественнонаучных курсов учебного плана и потому в какой-то мере должен отражать физический подход к механике, а более конкретно — опыт преподавания механики студентам-физикам. С другой стороны, нельзя было жертвовать строгостью изложения (например, в кинематике, где физики обычно весьма небрежны). Работая в содружестве с С. В. Болотиным и В. А. Прошкиным, которые вели семинарские занятия на потоке, автор постарался уместить в первые два семестра самые основные разделы курса (они и составили ядро первой части книги), а более трудные и специальные вопросы программы были отнесены в третий семестр. В первую часть вошли также некоторые методические указания по решению задач, выработанные автором в процессе преподавательской работы.

Этой книгой автор стремился расширить палитру методических приемов, применяемых ныне в преподавании классической динамики, и при этом не стеснялся заимствовать краски из любых подходящих источников. Изучение литературы показывает, что в методике очень верен тезис: новое есть хорошо (но напрасно) забытое старое — тезис, который побуждает к осторожности при выделении собственного вклада и вместе с тем позволяет не делать ссылок.

В символике и терминологии книга максимально следует традиции; только об одной особенности стоит предупредить: записывая функциональную зависимость в виде $y=y(x)$, автор нередко прибавляет ко второй букве y какую-нибудь звездочку или черточку — с тем, чтобы переменная-образ и формула, задающая функцию, были обозначены похоже, но все-таки не одинаково, например так: $y=y^*(x)$.

Формулы имеют двойную нумерацию. При ссылках внутри одной темы или параграфа указывается только вторая цифра.

Список литературы представляет собой первоначальные ориентировочные указания, предназначенные для студентов.

Подробность изложения в книге не везде одинакова, а на ряде мест умышленно делается некоторый эмоциональный акцент. Несмотря на то что оба курса были тщательно продуманы и к тому же дополнительно доработаны при написании книги, ни тот, ни другой опыты не предлагаются в качестве завершенной методики предмета; критика их будет принята с благодарностью. Эта книга не является учебником еще и потому, что требует от читателя самостоятельно восстанавливать многие — хотя и простые — детали рассуждений. Вместе с тем автор надеется, что она окажется полезной студентам: краткий текст позволяет скорее ухватить логику изложения и стимулирует активное осмысление материала у тех, кто к этому склонен. Если эта книга в какой-то мере компенсирует отсутствие современного учебника и задачника по классической динамике для студентов-математиков и механиков, то цель ее будет достигнута.

Хочется подчеркнуть, что эта книга не была бы написана вне той творческой атмосферы, которая присуща кафедре теоретической механики механико-математического факультета МГУ и за которую автор благодарен прежде всего заведующему кафедрой Д. Е. Охочимскому. Лучшее в книге — это результат острых и доброжелательных дискуссий: автор особенно признателен И. Л. Антонову, который увидит в книге несколько своих мыслей; своему учителю В. Г. Демину, первым на кафедре начавшему поиск новых, современных путей изложения курса; В. В. Козлову, с которым автор всегда (скоро уже пятнадцать лет) соглашается в главном и никогда — в деталях; Н. Н. Колесникову, чей мудрый опыт излечил автора от некоторых крайностей. Спасибо и безымянному Студенту мехмата: он учится у своих преподавателей прежде всего думать и заставляет их делать то же самое.

Я. В. Татарinov

ЧАСТЬ I

АНАЛИТИЧЕСКИЙ КУРС

Тема I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О НАБЛЮДЕНИИ И ИЗМЕРЕНИИ

Серьезное обсуждение основ любой научной дисциплины возможно лишь с позиций, лежащих вне ее, и предполагает определенную общую культуру собеседников — в нашем случае общезначимую и философскую. В рамках этого вводного курса такое обсуждение преждевременно; мы лишь схематически наметим, над чем полезно задуматься. Сначала наше внимание привлекут

ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ, ЧИСЛО.

Известно, что ребенка можно научить считать, только прививая ему некоторые моторные навыки — попросту говоря, побуждая его многократно собственными руками перекладывать однородные предметы. Наши представления о пространстве и времени — это итог многовекового общечеловеческого опыта ориентирования в окружающем мире, начиная с различения и счета животных, растений, камней, орудий и звезд, осознания мускульных усилий по перемещению предметов и самого себя в пространстве, наблюдения смены дня и ночи и ощущения пульса. Счет шагов и лет открыл список разнообразных способов измерения расстояния и времени; развивались арифметика, геометрия и астрономия. Наблюдения и эксперименты, основанные на измерении, стали началом механики и физики. Выработалась психологическая установка искать и выделять наиболее существенные черты явлений природы и техники; сложился и глубоко укоренился в научном сознании ряд фундаментальных представлений. В их числе понятие геометрической точки — объекта, который не имеет размеров, но тем не менее может быть опознан;

понятие не имеющего протяженности мгновения времени;

понятие непрерывного процесса движения.

Даже с появлением квантовой механики работоспособность этих понятий не уменьшилась.

Войдем теперь в пределы классической механики и нанесем на карту этой области знания несколько опорных пунктов.

Если мы наблюдаем (не созерцаем, а наблюдаем) движущуюся точку, то это в первую очередь значит, что у нас имеется

система координат,

в которой положение точки задается тремя действительными числами x, y, z . Более того, опыт убеждает в том, что в нашем расположении, если потребуется, всегда будет декартова система координат — такая, в которой расстояние между двумя положениями x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Следовательно, в окружающем пространстве действует евклидова геометрия во всем ее богатстве (включая векторную алгебру).

Независимо от системы координат у нас есть

часы

(на практике это некоторый регулярно повторяющийся процесс), отсчитывающие время t . Слово «независимо» здесь очень важно. За ним кроется,

во-первых, предположение о независимости процедур измерения расстояния и времени: не имеет значения, что измерение расстояния занимает некоторое время, а измерение времени разворачивается в пространстве;

во-вторых, предположение о том, что число, обозначающее текущее мгновение времени в одном месте, можно определять по показаниям часов в другом месте; в этом смысле выражение «сейчас» корректно применительно ко всему пространству в целом. Этот исходный тезис механики Ньютона настолько привычен и настолько удобен, что даже отказ от него с позиций специальной теории относительности играет весьма ограниченную роль не только в других разделах физики, но и при применении самой теории относительности для вычислений в конкретных задачах (точные уравнения этой теории заменяются на уравнения Ньютона с поправочными членами).

Система координат вместе с часами — это

система отсчета.

Движение точки в данной системе отсчета задается функциями $x(t), y(t), z(t)$. Их можно интерпретировать как переменные координаты некоторой движущейся геометрической точки $P(t)$, а также как компоненты ее радиуса-вектора $\mathbf{r} = \overline{OP}$, где O — точка с координатами $(0, 0, 0)$. Итак,

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы декартовой системы координат. Они образуют ортонормированный репер. Скорость точки — это вектор, который имеет несколько эквивалентных обозначений:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z.$$

Аналогично ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z.$$

Системы отсчета используются для того, чтобы производить

ИЗМЕРЕНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЙ.

Из окружающего нас мира мы умеем мысленно вычленять материальные объекты и давать им наименования. Мы понимаем, что эти объекты разнообразно взаимодействуют друг с другом, умеем различать взаимодействия и давать наименования и им тоже (мы понимаем также, что всякое умение и ограничено, и постоянно совершенствуется). Далее, в зависимости от обстоятельств мы умеем пренебрегать несущественными взаимодействиями; мы допускаем приближенную точку зрения, согласно которой один объект может действовать на другой и при этом не испытывать обратного воздействия. Все это мы умеем лишь в той мере, в какой владеем физикой.

Основной мысленный образ классической динамики —

материальная точка.

Это тело, размеры которого для нас несущественны. Не имея размеров, материальная точка отличается от геометрической тем, что у нее есть масса — характеристика, которую мы умеем измерять в силу того, что материальная точка способна взаимодействовать с другими объектами. Массу можно измерять и у протяженных объектов. Основным свойством массы является ее аддитивность: масса объединения двух тел равна сумме масс каждого из них.

Воздействия тоже нужно измерять. Поскольку речь идет о движении, для этого необходимо иметь систему отсчета. Далее, предполагается, что используемая нами

система отсчета — инерциальная,

т. е. с разумной степенью точности мы можем считать, что если материальная точка имеет ненулевое ускорение в нашей системе отсчета, то только в результате воздействия на нее других объектов (первый закон Ньютона). Допустим теперь, что поставлен ряд экспериментов, в которых разные точки подвергались одному и тому же воздействию. Опыт показал, что возможны результаты двух сортов: либо ускорение a оказывалось одним и тем же для всех точек (круг явлений, связанных с фундаментальным гравитационным воздействием), либо ускорение оказывалось обратно пропорциональным массе (круг явлений, имеющих в конечном счете электромагнитную природу). Таким образом, наряду с ускорением важную роль приобрела несколько иная векторная величина:

$$\text{сила } F = ma,$$

причем оказалось возможным и удобным измерять ее непосредственно. Таким образом, сила играет роль универсальной характеристики воздействий. Мы говорим: «сила сопротивления вязкой среды», «сила деформации пружины» и так далее. Сила гравитационного воздействия пропорциональна массе.

Равенство $F = ma$ может не только служить определением силы, но и допускать обратное прочтение (второй закон Ньюто-

на): можно считать силу $\mathbf{F}$ заданной и тогда подбирать движения так, чтобы равенство $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ выполнялось тождественно: если вычисленные движения хорошо совпадают с наблюдаемыми, то мы вправе считать, что заданная сила хорошо выражает имеющееся воздействие. Это — простейшее

моделирование.

На этом стоит несколько задержаться. Что значит задать силу и как подобрать движение? Начать придется издалека. В естественных науках действует принцип, согласно которому

если условия одного эксперимента с достаточной точностью воспроизводят условия другого, то результаты обоих экспериментов будут одинаковыми. Точность воспроизведения определяется, в частности, точностью измерений. Кроме того (если не в первую очередь), важно знать, какие именно характеристики опыта надлежит воспроизводить с высокой точностью, т. е. важно достичь определенного уровня понимания происходящего.

В механике одним из проявлений универсального принципа воспроизводимости экспериментов является

принцип детерминированности.

Поясним на примере. Если исследуется воздействие заданного объекта на заданную материальную точку, и в мгновение t известно ее положение $\mathbf{r}$ и скорость $\mathbf{v}$, то ее последующее движение может быть только одно. Отсюда вытекает, что скорость $\mathbf{v}(t+\tau)$ определена однозначно; следовательно, ускорение $\mathbf{a}$ в мгновение t и сила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ также могут принимать единственное значение (рис. 1). Иными словами, сила $\mathbf{F}$ есть функция времени, положения и скорости:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t).$$

Задать силу — значит конкретно указать эту зависимость при помощи явной формулы. После этого второй закон Ньютона принимает вид векторного дифференциального уравнения второго порядка:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r}, t \right),$$

или в координатах — вид системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{y} = Y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{z} = Z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{cases}$$

Подобрать движение — значит найти решение этой системы. В классической динамике имеется некоторый запас моделей движения, с самыми простыми из которых мы вскоре познакомимся. Пока лишь приведем примеры того, как задаются силы:

- 1) сила тяжести $m\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ — обычно постоянный вектор;

2) сила упругости $F = -kx$ (точка привязана за упругую нить, длина которой в ненапряженном состоянии равна нулю);

3) сила вязкого трения $F = -Cv$ (сопротивление среды направлено против скорости и тем сильнее, чем больше величина скорости, в простейшем варианте C — постоянный коэффициент);

4) сила Лоренца $F = q(E + (1/c)[v \times B])$ (заряд q находится в электромагнитном поле с электрической напряженностью $E(r, t)$ и магнитной индукцией $B(r, t)$; c — скорость света; подробности еще впереди).

Поскольку реальный мир богаче мысленного, модели постоянно приходится усложнять, и здесь мы опираемся на

принцип суперпозиции,

или правило сложения сил, суть которого в следующем:

если объект O_1 , будучи в одиночестве, действует на материальную точку с силой F_1 , а объект O_2 аналогично — с силой F_2 , то в совокупности эти объекты действуют на точку с силой $F_1 + F_2$ (векторная сумма по правилу параллелограмма), см. рис. 1.

Резюмируя, силу можно определить как векторную характеристику воздействий на точку, подчиняющуюся принципу суперпозиции; второй закон Ньютона постулирует связь этой характеристики с массой точки и ускорением ее в инерциальной системе отсчета. Опыт показал, что это открывает разнообразнейшие возможности с высокой точностью моделировать движение реальных объектов.

Теперь нам необходимо вспомнить, что такое

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Не будем претендовать на полноту и ограничимся рамками только механики в узком смысле слова. Обратим внимание на то, что измерение или задание разного рода величин всякий раз предполагает осознанный выбор единиц длины, времени и массы. Например, применяются системы СГС (см, с, г), СИ (м, с, кг) и др. Численное значение величины имеет смысл только тогда, когда задана ее размерность: пишем

$$l = 183 \text{ см}, v = 60 \text{ км/ч}, g = 9,8 \text{ м/с}^2, m = 40 \text{ т},$$

и т. д. Будем условно обозначать размерность длины, массы и времени соответственно буквами L, M, T (по Максвеллу). Размерность любой физической величины X будет

$$[X] = L^{x_1} \cdot M^{x_2} \cdot T^{x_3}, \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — некоторые целые или рациональные числа. Это значит, что если мы изменим единицы измерения и положим

$$L' = \lambda L, M' = \mu M, T' = \tau T$$

(допустим, перейдем от СГС к СИ), то численное значение величины X изменится тоже:

$$X = \lambda^{x_1} \mu^{x_2} \tau^{x_3} X'. \quad (1.2)$$

Например, для скорости v имеем

$$[v] = L/T, \quad 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч},$$

для ускорения —

$$[g] = L/T^2, \quad 9,8 \text{ м/с}^2 \approx 130\,000 \text{ км/ч}^2.$$

На формулу (2) будем смотреть как на исходное положение (иначе говоря, размерную величину можно было бы определить как одночлен вида $XL^{x_1} M^{x_2} T^{x_3}$, но мы не хотим становиться на формальную точку зрения). Операции над размерными величинами производятся такие:

а) сложение $X+Y$, если $[X]=[Y]$;

б) умножение XY : при этом

$$[XY] = L^{x_1+y_1} M^{x_2+y_2} T^{x_3+y_3} = [X][Y]; \quad (1.3)$$

в) возведение в рациональную степень a ; при этом

$$[X^a] = L^{ax_1} M^{ax_2} T^{ax_3} = [X]^a. \quad (1.4)$$

Только что сказанное составляет наивный уровень соображений размерности и известно каждому. Однако из этого можно извлечь намного более глубокие заключения, составляющие

метод безразмерных комбинаций.

Размерности L, M, T будем считать независимыми. Разумно будет сказать, что размерности величин l, v, g зависимы, поскольку

$$[v]^2 = [l][g],$$

и что, наоборот, размерности

$$[F] = ML/T^2, \quad [v] = L/T, \quad [\rho] = M/L^3$$

(здесь ρ — плотность массы)

независимы, так как связать их соотношением типа $[F]^a = [v]^b [\rho]^c$ явно невозможно. Будем говорить, что величины X, Y, Z

размерно независимы,

если определитель из соответствующих показателей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Предложение. Для любой величины P в этом случае

$$[P] = [X]^a [Y]^b [Z]^c,$$

где a, b, c — снова некоторые рациональные числа.

В силу (3) и (4) это все равно, что разложить вектор показателей (P_1, P_2, P_3) по новому базису.

Следствие. После изменения масштабов

$$X = \xi X', \quad Y = \eta Y', \quad Z = \zeta Z' \quad (1.5)$$

величина P меняется следующим образом:

$$P = \xi^a \eta^b \zeta^c P' \quad (1.6)$$

Величина

$$\Pi = \frac{P}{X^a Y^b Z^c} \quad (1.7)$$

по определению есть так называемая

безразмерная комбинация

величин P, X, Y, Z . Показатели при L, M, T для нее равны нулю. Она сохраняет свое численное значение при изменении масштабов.

Взятие любой элементарной ($\sin, \exp, \ln, \arctg$ и т. д.) или иной не полиномиальной функции возможно лишь от безразмерных величин (например, углов в радианной мере) или от безразмерных комбинаций размерных величин.

П-теорема. Пусть имеется зависимость вида

$$P_0 = f(X, Y, Z, P_1, \dots, P_S),$$

в которой величины X, Y, Z положительны и размерно независимы. Тогда существует эквивалентная зависимость

$$\Pi_0 = \varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_S),$$

в которой Π_i — безразмерные комбинации вида (7).

Доказательство. После изменения масштабов (5) в силу (6)

$$\xi^a \eta^b \zeta^c P_0 = f(\xi X, \eta Y, \zeta Z, \xi^a \eta^b \zeta^c P_1, \dots, \xi^a \eta^b \zeta^c P_S)$$

(штрихи при P_i, X, Y, Z мы убрали). Каковы бы ни были значения X, Y, Z , всегда можно так изменить масштабы, что

$$\xi = \frac{1}{X}, \quad \eta = \frac{1}{Y}, \quad \zeta = \frac{1}{Z}.$$

Всякий раз получим

$$\frac{P_0}{X^a Y^b Z^c} = f\left(1, 1, 1, \frac{P_1}{X^a Y^b Z^c}, \dots, \frac{P_S}{X^a Y^b Z^c}\right), \quad (1.8)$$

что и требовалось.

Сила П-теоремы (равно как и слабость) в том, что не играет никакой роли источник зависимости f .

Пример. Пусть шар радиуса R движется со скоростью v в газе плотностью ρ . Допустим, что сила сопротивления $F = f(\rho, v, R)$. Анализируя размерности

$$[R] = L, [\rho] = M/L^3, [v] = L/T, [F] = ML/T^2,$$

видим, что первые три независимы и что $[F] = [\rho][R]^2[v]^2$. В силу П-теоремы $F/\rho R^2 v^2 = f(1, 1, 1) = C$. Хотя значение C установить мы не можем, ясно, что

$$F = C \rho R^2 v^2,$$

т. е. сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Это — знание. Разумны ли допущения — покажет опыт.

Советы на будущее. Формула (8) позволяет нам в случае необходимости действовать по следующей схеме.

В уравнениях (каких-то), которые надо решить для получения зависимости f , полагаем $X=Y=Z=1$; уравнения становятся проще, и мы довольно скоро приходим к выражению

$$P_0 = \Phi(P_1, \dots, P_S),$$

после чего заменяем $P_0, \dots, P_S$ их безразмерными комбинациями и в итоге имеем искомое:

$$P_0 = X^{a_0} Y^{b_0} Z^{c_0} \Phi \left(\frac{P_1}{X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1}}, \dots, \frac{P_S}{X^{a_S} Y^{b_S} Z^{c_S}} \right).$$

Если в уравнениях только два размерно независимых параметра, то можно действовать по аналогичной схеме, не обращая внимания на независимую размерность.

В классической динамике значение метода безразмерных комбинаций почти целиком сводится к приемам, позволяющим сократить выкладки. Подлинный размах этот метод приобретает в механике сплошных сред.

Тема 2

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Простейшими моделями в динамике являются такие, в которых дифференциальные уравнения движения получаются линейными. Решение линейных уравнений в принципе тривиально. Сами модели, однако, не тривиальны в том смысле, что позволяют уловить ряд важных эффектов в поведении механических систем.

Дальнейшее изложение будет прямым перечислением моделей (разумеется, без какой-либо полноты списка), причем

1) каждую модель мы сопроводим наглядным комментарием, и пусть подспорьем будут представления, сохранившиеся от школьного курса физики (например, закон упругости Гюка, который здесь не обсуждаем, но используем);

2) следуя традиции, буквенные параметры условимся считать положительными, если не оговорено что-либо иное;

3) всегда начальное мгновение $t_0 = 0$;

4) для простоты сначала будем рассматривать движение по прямой и по плоскости.

ДВИЖЕНИЕ ПО ИНЕРЦИИ:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = x_0 + \dot{x}_0 t.$$

ПАДЕНИЕ:

$$m\ddot{z} = -mg \Rightarrow z = z_0 + \dot{z}_0 t - gt^2/2.$$

ДВИЖЕНИЕ В СРЕДЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} \Rightarrow x = x_0 - \frac{m}{c} \dot{x}_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Точка либо покоится, либо стремится к покою при $t \rightarrow \infty$.

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ:

$$m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}.$$

Сейчас самое время проиллюстрировать применение метода безразмерных комбинаций. Параметры задачи имеют размерности

$$[m] = M, [g] = L/T^2, [c] = M/T,$$

которые, конечно, независимы. Положим $m = g = c = 1$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \dot{z} = -1 - \dot{z},$$

$$\dot{z} = -1 + \dot{z}_0 e^{-t},$$

$$z = z_0 - t - \dot{z}_0 e^{-t}.$$

Вместо t , $z(z_0)$, $\dot{z}_0$ подставим безразмерные комбинации

$$\frac{ct}{m}, \quad \frac{ze^2}{gm^2}, \quad \frac{\dot{z}_0 m}{gc}.$$

Получим общее решение

$$z = z_0 - \frac{mg}{c} t - \frac{m}{c} \dot{z}_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Движение всегда стремится к равномерному падению со скоростью mg/c (можно предложить в качестве упражнения доказать это, не решая уравнения движения).

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР):

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Получаются гармонические колебания (осцилляции):

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь частота ω , период колебаний T , амплитуда A и начальная фаза φ даются формулами:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Важно, что период не зависит от амплитуды.

ОСЦИЛЛЯТОР В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ:

$$m\ddot{z} = -kz + mg.$$

Те же колебания, но со смещением: равновесие $z_* = mg/k$.

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}.$$

Назовем коэффициентом затухания число $\chi = c/2m$. Если $\chi < \omega$, то происходят затухающие колебания (рис. 68, а):

$$x = e^{-\chi t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t), \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \chi^2}.$$

Если $\chi > \omega$, то наблюдается аperiodический режим (рис. 68, б).

ОСЦИЛЛЯТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx + \Phi \cos \nu t.$$

Для выкладок (их мы опустим) удобно положить равными единице независимые параметры m, k, Φ . Результат: к гармоническим колебаниям $A \cos(\omega t + \varphi)$ прибавляются частные решения

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{k - m\nu^2} \cos \nu t & (\nu \neq \omega), \\ & \frac{\Phi \omega t}{2k} \sin \omega t & (\nu = \omega), \end{aligned}$$

так что

А) при $\nu \approx \omega$ возникают биения — колебания с частотой $(\omega + \nu)/2$ и амплитудой, меняющейся (рис. 69, а) с периодом

$$\tau = \frac{4\pi}{|\omega - \nu|},$$

максимум которой стремится к бесконечности при $\nu \rightarrow \omega$;

Б) если $\nu = \omega$, то получается раскачивание — колебания с амплитудой, растущей примерно линейно (рис. 69, б). Оба этих явления совокупно представляют собой так называемый

резонанс

(первая половина биения поначалу неотличима от раскачивания).

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \Phi \cos \nu t.$$

Этой важной задаче уделяется много внимания в курсах теории колебаний (причем в качестве периодического слагаемого в правой части берется, конечно, не только простейший косинус). Мы же ограничимся только указанием на то, что все движения стре-

мятся к вынужденному колебанию

$$x = \frac{\Phi}{m \nu \sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\chi^2 \nu^2}} \cos \left(\nu t + \arctg \frac{2\chi \nu}{(\omega^2 - \nu^2)} \right).$$

ДВИЖЕНИЕ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ:

$$\mathbf{F} = -m g \mathbf{e}_y \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t - gt^2/2 \end{cases}$$

При $\dot{x}_0 \neq 0$ траектории будут параболами.

ПЛОСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР:

в векторном виде сила имеет вид

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = -k(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y).$$

Поэтому уравнения движения суть

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}$$

Как и в предыдущей задаче, в этой имеет место
разделение переменных,

т. е. получаются независимые уравнения, задающие изменение каждой из координат со временем. Общее решение

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \\ y &= y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

можно представить в специфическом для этой задачи виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x}_0 \\ y_0 & \dot{y}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Если в этой формуле определитель матрицы отличен от нуля — начальная скорость неколлинеарна начальному радиусу-вектору, то, применив обратную матрицу (это не обязательно делать в явном виде), увидим, что $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ суть линейные функции x и y с коэффициентами, зависящими от начальных условий. Следовательно, тождество $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \equiv 1$ даст нам уравнение траектории, которая получится эллипсом (сумма квадратов линейных форм есть положительно определенная квадратичная форма). Легко понять, что центр этого эллипса находится в начале координат.

ПЛОСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

По сравнению с предыдущей задачей добавляется сила

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -c\mathbf{v} = -c(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y),$$

так что в уравнениях движения переменные снова разделяются. Задача свелась к соответствующей одномерной.

Здесь, однако, уместно сделать качественный комментарий: мы видим, что если на колебательное движение наложить вязкое трение, то вместо ограниченных колебаний будем иметь асимптотическое стремление к нулю всех решений. Другими словами, устойчивая линейная система превращается в асимптотически устойчивую. Заметим (но это выходит за рамки настоящих лекций), что сделанное частное наблюдение может быть расширено до одной общей теоремы из теории устойчивости.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

такое же, как движение массы в однородном поле тяжести.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мы хотим показать силу, которая, как и вязкое трение, зависит только от скорости, но зависит совершенно иначе. Это — сила Лоренца. Представим ее в примитивном виде:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{v} \times \mathbf{C}],$$

где $\mathbf{C}$ — некоторый постоянный вектор, так что сила перпендикулярна скорости. Отсюда вытекает, что движение происходит со скоростью $\mathbf{v}$, неизменной по модулю: $|\mathbf{v}| = \text{const}$. В самом деле, кинетическая энергия точки $m\mathbf{v}^2/2$ постоянна:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} \right) = ([\mathbf{v} \times \mathbf{C}], \mathbf{v}) \equiv 0,$$

что и требовалось. Скорость сохраняет абсолютную величину, но все время меняет направление. Выпишем уравнения движения, считая без уменьшения общности, что $\mathbf{C} = C\mathbf{e}_y$:

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \dot{x} & 0 \\ \mathbf{e}_y & \dot{y} & C \\ \mathbf{e}_z & \dot{z} & 0 \end{vmatrix} = Cx\mathbf{e}_z - C\dot{z}\mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -C\dot{z} \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = C\dot{x} \end{cases}$$

Видим, что переменная y отделилась, и y меняется равномерно. В частности, возможно $\dot{y} = 0$, $y = \text{const}$. Поэтому дальнейшее исследование достаточно провести для движений в плоскости Oxz , происходящих независимо. Система первых двух уравнений:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{C}{m}\dot{z}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = +\frac{C}{m}\dot{x}$$

эквивалентна уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} = -\frac{C^2}{m^2}\dot{x},$$

которое мы уже умеем решать:

$$\dot{x} = C_1 \cos \frac{C}{m} t + C_2 \sin \frac{C}{m} t,$$

$$\dot{z} = C_1 \sin \frac{C}{m} t - C_2 \cos \frac{C}{m} t,$$

т. е. вектор $\mathbf{v}$ равномерно вращается. Отсюда (можно просто проинтегрировать по t последние равенства) точка m движется равномерно по окружности радиуса mv/c .

Если бы никакой силы не было, то мы имели бы движение по прямой с постоянной скоростью. Наложение магнитного поля превращает прямые траектории в круговые, как бы закручивает траектории в одну сторону (здесь — против часовой стрелки).

При $j \neq 0$ траектории получаются винтовыми линиями.

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ (ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ) И ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Имеется в виду сила

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z + C[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_y].$$

Угадать, во что превратятся параболические траектории после наложения магнитного поля, «из общих соображений» мало кому удастся. Для краткости формул положим размерно независимые параметры равными единице. Уравнению движения можно придать вид:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{e}_z + [\mathbf{v} \times \mathbf{e}_y].$$

Это — неоднородное линейное уравнение. К общему решению из предыдущей задачи надо прибавить частное решение. Легко видеть, что подходит

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{e}_x.$$

Это значит, что конец вектора скорости движется по окружности, центр которой смещен вдоль оси Ox вправо. Движение можно представить как вращение по окружности, равномерно двигающейся в направлении $\mathbf{e}_x$ (так называемый дрейф). Точка в конечном счете не падает. Возможные траектории изображены на рис. 63.

ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ И ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Эти две интересные и поучительные задачи мы рассмотрим позднее, в четвертой теме (сочетание столь различных воздействий выглядит искусственно, но мы прибегаем к нему лишь для того, чтобы использовать уже знакомые нам физические представления).

Тема 3

СВЕДЕНИЯ О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Векторным полем в трехмерном пространстве (или в некоторой области трехмерного пространства) называется вектор-функция положения и времени:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t).$$

Считаем, что вектор Φ приложен в точке $\mathbf{r}$. В координатах (как всегда, правая декартова система)

$$\Phi = \Phi_x \mathbf{e}_x + \Phi_y \mathbf{e}_y + \Phi_z \mathbf{e}_z,$$

$$\Phi_x = \Phi_x(x, y, z, t), \quad \Phi_y = \Phi_y(x, y, z, t), \quad \Phi_z = \Phi_z(x, y, z, t).$$

Мы начнем с примеров силовых полей.

С физической точки зрения все макроскопические взаимодействия (т. е. взаимодействия тел с достаточно большим числом атомов) суть сложные комбинации двух фундаментальных взаимодействий между частицами: гравитационного и электромагнитного (последнее особенно богато проявлениями: например, силы упругости, силы трения имеют чисто электромагнитную природу). Это обязывает нас рассмотреть хотя бы частные проявления фундаментальных сил, когда одностороннему воздействию подвергается только одна материальная точка.

Итак, имеем точку массы m . Если в пространстве нет ничего, кроме другой точки массы M , то гравитационное воздействие на m выражается силой

$$\mathbf{F} = -f \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки M в точку m , f — универсальная гравитационная постоянная; $[f] = L^3/T^2M$; модуль силы $\mathbf{F}$ обратно пропорционален квадрату расстояния между точками и пропорционален их массам, причем сила направлена от одной массы к другой (притягивающая сила). В этом состоит закон гравитации Ньютона.

Аналогичную структуру имеет сила электростатического взаимодействия (сила Кулона). Материальная точка характеризуется электрическим зарядом q (величина, которая может быть и положительной, и отрицательной, и равной нулю). Если Q — заряд другой точки, и обе они неподвижны, то

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если $Qq > 0$, то сила будет отталкивающей.

Для измерения заряда требуется, вообще говоря, отдельная единица измерения. Можно сделать ее зависимой от единиц массы, длины и времени, выбрав так, чтобы коэффициент в послед-

ней формуле стал равным единице. Тогда

$$[q] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}.$$

Впредь мы так и поступим (т. е. фактически будем пользоваться так называемой гауссовой системой единиц).

Формальная структура поля силы тяготения и электростатического поля одна и та же:

$$X = C \frac{x}{r^3}, \quad Y = C \frac{y}{r^3}, \quad Z = C \frac{z}{r^3},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $C = -fMm$ или $C = Qq$. Различие в следующем: во-первых, сила Кулона может быть и отталкивающей, во-вторых, сила гравитации не зависит от того, движется масса m (и M) или нет, тогда как выражение силы Кулона предполагает, что оба заряда имеют нулевую скорость. Тем не менее можно сказать, что в том и другом случаях мы имеем

силовое поле.

Чтобы построить более сложные примеры, надо вспомнить

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

Градиентом функции (скалярного поля) $\Phi(x, y, z, t)$ называется векторное поле $\text{grad } \Phi$ с компонентами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Векторное поле

$$\text{rot } \Phi = \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

называется ротором поля Φ , а функция

$$\text{div } \Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

называется его дивергенцией. Во всех этих формулах t выступает как параметр. По нему можно дифференцировать. Например,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi_y}{\partial t} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} \mathbf{e}_z.$$

Всегда $\text{rot grad } \Phi \equiv 0$, $\text{div rot } \Phi \equiv 0$. Локально (и вообще в области, допускающей непрерывную деформацию в шар) справедливы обратные формулы:

$$\text{rot } \Phi \equiv 0 \Rightarrow \Phi = -\text{grad } \varphi$$

(знак минус поставлен для удобства в дальнейшем),

$$\text{div } \Phi \equiv 0 \Rightarrow \Phi = \text{rot } \Psi.$$

Функция φ и поле Ψ называются соответственно скалярным и

векторным потенциалами поля Φ . Для гравитационного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \\ \mathbf{F} &= -\text{grad } V, \\ V &= -\frac{fMm}{r} \end{aligned} \quad (3.1)$$

(для памяти: здесь всюду стоят минусы). Нетрудно вычислить, что дивергенция этого поля равна нулю, откуда

$$\text{div grad } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \equiv 0, \quad (3.2)$$

так что потенциал V есть гармоническая функция.

Легко заметить, что в качестве потенциала суммы двух векторных полей можно взять сумму потенциалов каждого. Отсюда вытекает, что потенциалы силовых полей удовлетворяют принципу суперпозиции. Следовательно, потенциал $V(\mathbf{r})$ гравитационного воздействия со стороны нескольких точек состоит из нескольких гармонических слагаемых вида:

$$-\frac{fM_v m}{r_v}, \quad r_v = |\overline{mM_v}|,$$

и потому является гармонической функцией везде, кроме самих этих точек, где потенциал обращается в $-\infty$. Если $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, то $V(\mathbf{r}) \rightarrow 0$. Аналогичными свойствами обладает

гравитационный потенциал тела.

Пусть в некоторой ограниченной области $\mathcal{D}$ имеется непрерывное распределение масс с плотностью $\delta(P)$, $P \in \mathcal{D}$. Обозначим через $dM(P) = \delta(P) d\tau$ массу бесконечно малого объема $d\tau$, окружающего точку P , и положим $\mathbf{q} = \overline{OP}$. Тогда

$$V(\mathbf{r}) = -fm \int_{\mathcal{D}} \frac{dM(P)}{|\mathbf{r} - \overline{OP}|} = -fm \int_{\mathcal{D}} \frac{dM}{|\mathbf{r} - \mathbf{p}|}. \quad (3.3)$$

Не вычисляя интеграла, покажем, что потенциал однородного ($\delta = \text{const}$) шара радиуса R совпадает с потенциалом точки массы $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$, помещенной в его центр (начало координат).

Из симметрии распределения масс вытекает, что

$$V = fmV(M, R, r),$$

а П-теорема (параметры fm , M , R положительны и размерно независимы) приводит нас к выражению

$$V = f \frac{Mm}{R} U\left(\frac{r}{R}\right).$$

Положим $fm = M = R = 1$. Нам осталось найти гармонические

функции вида $U(r)$. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U' \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} U',$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U'}{r} - \frac{U'}{r^2} \frac{x^2}{r} + U'' \frac{x^2}{r^2},$$

и аналогично для y, z . Отсюда

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = 2U'/r + U'' \equiv 0,$$

что влечет

$$\frac{d}{dr} U' = -\frac{2}{r} U', \quad U' = \frac{C}{r^2}, \quad U = -\frac{C}{r} + \tilde{c},$$

причем $\tilde{c} = 0$ в силу условия на бесконечности. Итак,

$$V = -\frac{fMm}{R} \frac{CR}{r} = -C \frac{fMm}{r}.$$

При $R \rightarrow 0$ этот потенциал (который от R не зависит) должен давать нам потенциал точки. Поэтому $C = 1$, что и завершает рассуждения.

На практике потенциалы раскладывают в ряды по степеням $1/r$. А именно в сферических координатах r, θ, φ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (3.4)$$

в области $r > R$, где нет ни одной точки тела, пользуются разложениями вида:

$$V = -\frac{fMm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{R}{r} \right)^n W_n(\theta, \varphi) \quad (3.5)$$

(величины I_n — некоторые безразмерные постоянные). В частности, можно доказать, что для любого осесимметричного тела (пусть ось Oz — это ось симметрии; тогда W_n не зависит от φ)

$$V(r) = -\frac{fMm}{r} \left(1 + I_1 \frac{R}{r} \cos \theta + I_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) + O \left(\frac{R}{r} \right)^3. \quad (3.6)$$

С этой точки зрения нас заинтересует теперь

ЗАДАЧА ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ.

В ней гравитационное поле создается двумя точечными массами:

$$M_1 = \frac{1}{2} (M + \mu), \quad M_2 = \frac{1}{2} (M - \mu).$$

Не уменьшая общности, их можно поместить на ось Oz в точки $(0, 0, \pm a)$. Используя угол θ между вектором $\mathbf{r}$ и этой осью, напишем

$$V(\mathbf{r}) = -fm \left[\frac{M + \mu}{2 \sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}} + \frac{M - \mu}{2 \sqrt{r^2 + 2ar \cos \theta + a^2}} \right]. \quad (3.7)$$

Положительные параметры $f m$, M , a размерно независимы, так что для выкладок приравняем их к единице:

$$V = -\frac{1}{2r} \left[\frac{1+\mu}{\sqrt{1 - \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2}}} + \frac{1-\mu}{\sqrt{1 + \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2}}} \right]. \quad (3.8)$$

Для последующего разложения в ряд по степеням $1/r$ воспользуемся формулой Тейлора:

$$(1 + \chi)^n = 1 + n\chi + \frac{n(n-1)}{2} \chi^2 + O(\chi^3);$$

при $n = -1/2$

$$(1 + \chi)^{-1/2} = 1 - \frac{\chi}{2} + \frac{3}{8} \chi^2 + O(\chi^3),$$

где $O(\chi^3) \leq C\chi^3$ на любом отрезке $[\chi_1, \chi_2] \subset (-1, 1)$. В нашем случае для $r > R > 1$ получим

$$\begin{aligned} & \left(1 \mp \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1/2} = \\ & = 1 - \frac{1}{2} \left(\mp \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\mp \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2} \right)^2 + \dots = \\ & = 1 \mp \frac{\cos \theta}{r} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

и после подстановки в (3.8) придем к

$$V = -\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mu \cos \theta}{r} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^2} \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

В размерных переменных

$$V = -\frac{f M m}{r} \left(1 + \frac{\mu a}{M R} \cos \theta \frac{R}{r} + \frac{a^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) + O\left(\left(\frac{R}{r}\right)^4\right). \quad (3.9)$$

Это — частный вариант разложения (6), в котором

$$I_1 = \mu a / M R, \quad I_2 = a^2 / R^2.$$

Ясно, что потенциал задачи двух центров может с принятой точностью (до членов порядка $(R/r)^4$) совпадать с потенциалом объемного тела только в том случае, если коэффициент I_2 у этого тела положителен: такое тело должно быть вытянуто. Но в действительности все планеты (кроме разве что некоторых астероидов) сжаты в результате собственного вращения, так что потенциал (7) в качестве приближения для них не пригоден. Зато используется

потенциал Гредеакса

(одна из работ Эве Гредеакса имеется в списке литературы; имя этого небесного механика стало известно благодаря Г. Н. Дубо-

шину). Подход, предложенный Гредеексом, состоит в следующем. Примем формально, что массы притягивающих центров комплексные:

$$M_1 = \frac{1}{2} (M + i\mu), \quad M_2 = \frac{1}{2} (M - i\mu)$$

и расположены на «мнимой части оси Oz »: их координаты суть $(0, 0, \pm ia)$.

В формулах (7) и (9) надо заменить a на ia и μ на $i\mu$. Та и другая будут по-прежнему иметь смысл; в самом деле (7) состоит теперь из двух комплексно сопряженных слагаемых и потому задает действительную функцию. В результате

$$I_1 = -\frac{\mu a}{MR}, \quad I_2 = -\frac{a^2}{R^2}.$$

Коэффициент I_2 теперь отрицателен (а I_1 может быть любого знака, если считать $\mu \geq 0$). Потенциал Гредеекса удобен для некоторых расчетов орбит искусственных спутников Земли.

Аналогично гравитационному потенциалу двух масс можно рассмотреть потенциал силы Кулона, создаваемый двумя неподвижными зарядами Q_1, Q_2 . Формулы будут те же, только в них надо заменить fm на q , M на $Q_1 + Q_2$ и μ на $Q_1 - Q_2$. Кроме того, заряды не обязаны быть положительными.

В частности, возможно рассмотрение поля, создаваемого противоположными зарядами: $Q_2 = -Q_1$. Разложение типа (9) будет

$$V = \frac{2Q_1 a}{r^2} \cos \theta + \dots \quad (3.10)$$

Слагаемые, обозначенные многоточием, стремятся к нулю, если $a \rightarrow 0$. Считая, что одновременно $2Q_1 a \rightarrow K$, в пределе получим

диполь:

$$V_{\text{дип}} = \frac{K}{r^2} \cos \theta = \frac{Kz}{r^3}, \quad [K] = ML^4/T^2. \quad (3.11)$$

Можно вычислять потенциал непрерывного распределения зарядов. В отличие от гравитационного поля здесь более содержательны поверхностные и криволинейные распределения (например, заряды проводника всегда сосредоточены на его поверхности; потенциал на ней, кроме того, постоянен).

Расскажем о силе, действующей на движущийся заряд. Это

СИЛА ЛОРЕНЦА.

Заряд q помещен в электромагнитное поле; оно характеризуется двумя векторными полями: напряженностью электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и индукцией магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Сила Лоренца имеет вид ($\mathbf{v}$ — скорость заряда, c — величина скорости света)

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (3.12)$$

При $\mathbf{V}=0$ мы получим выражение для силы, не содержащее скорости, как в электростатике, но пригодное для движущегося заряда. Оговорка, сделанная нами при рассказе о силе Кулона (что оба заряда должны быть неподвижны), в принципе сохраняет свою силу, но сейчас погашается другой оговоркой: при написании силы Лоренца пренебрегают собственным электромагнитным полем движущегося заряда, которое, строго говоря, следовало бы прибавлять к заданному.

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не произвольны. Законом их изменения в пространстве и во времени являются

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.

Первая группа уравнения имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Видим, что поле $\mathbf{B}$ всегда обладает векторным потенциалом $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.13)$$

Операции rot и $\partial/\partial t$ перестановочны. Отсюда

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

так что потенциально поле:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (3.14)$$

В случае стационарных (не зависящих от времени) полей потенциально просто $\mathbf{E}$.

Вторую группу уравнения Максвелла выпишем только для электромагнитного поля в вакууме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Следовательно, скалярный и векторный потенциалы стационарных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют тождествам $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$ (т. е. φ — гармоническая функция) и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$. Векторный потенциал определен с точностью до слагаемого вида $\operatorname{grad} \psi$ (так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$). Выбором функции ψ можно добиться того, что $\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv 0$; тогда каждая компонента этого поля будет гармонической функцией.

Тема 4

СОПОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Система координат и часы на практике всегда опираются (и в переносном, и в буквальном смысле слова) на некоторое тело отсчета.

Это может быть Земля, корабль, вагон, спутник. Системы отсчета многочисленны: отсюда задача уяснить, насколько отличается описание движения с точки зрения разных систем. Уяснить — значит разработать удобную систему понятий, сопряженную с экспериментом и измерениями.

Пусть имеется некоторая система отсчета, которую условимся называть неподвижной. Множество точек P_i образует

ТВЕРДОЕ ТЕЛО,

если рассматриваются только такие непрерывные перемещения $P_i(t)$ этого множества, при которых расстояния между точками не изменяются: $|P_i(t_1)P_j(t_1)| = |P_i(t_2)P_j(t_2)|$ для любых t_1, t_2 . Легко доказать, что всякое конечное перемещение твердого тела (т. е. переход от $P_i(t_1)$ к $P_i(t_2)$) можно представить как результат его параллельного переноса и поворота вокруг произвольно отмеченной в теле точки: фактически речь идет об описании изометрий трехмерного евклидова пространства, сохраняющих ориентацию. Впредь условимся считать, что тело невырожденно, подразумевая под этим, что все его точки не расположены на одной-единственной прямой: тогда при каждой нетождественной изометрии хотя бы одна из точек тела будет изменять свое положение.

Начнем с изучения изометрий частного вида — поворотов, при которых отмеченная точка O остается неподвижной.

Любой поворот вокруг точки O имеет инвариантную прямую с направляющим единичным вектором $\mathbf{i}$ (все точки этой прямой остаются неподвижными). Поворот можно представить как результат вращения тела вокруг вектора $\mathbf{i}$ на некоторый угол χ mod 2π , который определен с точностью до 2π и отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть вдоль прямой навстречу $\mathbf{i}$. Произвольная точка P с радиусом-вектором $\mathbf{r} = \overline{OP}$ после поворота перейдет в новую точку P' с радиусом-вектором $\mathbf{r}' = \overline{OP'}$. Положим

$$\mathbf{r} = (r, \mathbf{i})\mathbf{i} + \mathbf{p},$$

где вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен прямой (рис. 8):

$$\mathbf{p} = -[\mathbf{i} \times [\mathbf{i} \times \mathbf{r}]].$$

Тогда

$$PP' = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{p} \cos \chi + [\mathbf{i} \times \mathbf{p}] \sin \chi - \mathbf{p},$$

откуда, наконец, получается

формула конечного поворота

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \sin \chi [\mathbf{i} \times \mathbf{r}] + (1 - \cos \chi) [\mathbf{i} \times [\mathbf{i} \times \mathbf{r}]]. \quad (4.1)$$

Из нее вытекает, что

$$\sin \chi = \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, [\mathbf{i} \times \mathbf{r}])}{|[\mathbf{i} \times \mathbf{r}]|^2}, \quad 1 - \cos \chi = \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, [\mathbf{i} \times [\mathbf{i} \times \mathbf{r}]])}{|[\mathbf{i} \times \mathbf{r}]|^2}. \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим не отдельный поворот, а вращение — процесс, в ходе которого все точки тела совершают гладкое движение (элементы матрицы поворота в репере $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ — гладкие функции времени). Пусть из положения в мгновение t в положение в мгновение $t + \tau$ тело можно перевести поворотом вокруг вектора $\mathbf{i}_t(\tau)$ на угол $\chi_t(\tau)$. При $\tau = 0$ этот поворот является тождественным.

Из формул (2) вытекает, что при $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю сам угол $\chi(\tau)$. Поэтому (1) приобретает вид

$$\mathbf{r}(t + \tau) - \mathbf{r}(t) = \chi[\mathbf{i} \times \mathbf{r}(t)] + O(\chi^2). \quad (4.3)$$

Более того, из (2) следует, что $|\chi(\tau)| \leq C|\tau|$, так как вектор $[\mathbf{i} \times \mathbf{r}]$ ограничен по модулю и не обращается в нуль. Разделив (3) на τ и устремляя τ к нулю, получаем $O(\chi^2) = O(\tau^2)$, так что

$$\mathbf{v}_P = [\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}], \quad (4.4)$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\chi(\tau) \mathbf{i}(\tau)}{\tau}. \quad (4.5)$$

Предел существует (так как предел имеет левая часть (3), причем $\mathbf{v}_P$ заведомо линейно зависит от $\mathbf{r}$) и представляет собой **вектор угловой скорости** рассматриваемого твердого тела в мгновение t . Происхождение термина объясняется следующим частным случаем: пусть тело поворачивается вокруг неподвижной оси $\mathbf{i} = \text{const}$ на угол $\varphi(t)$; тогда

$$\chi(\tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t) \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \tau) - \varphi(t)}{\tau} \mathbf{i}.$$

Короче говоря,

$$\mathbf{i} = \text{const} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i}. \quad (4.6)$$

Еще раз подчеркнем: это частный случай, а не общее определение. Здесь в выражении $\boldsymbol{\omega}$ участвует скорость изменения угла φ , т. е. угловая скорость в буквальном смысле термина.

В случае произвольного движения твердого тела мы можем как угодно отметить в нем точку и в каждое мгновение параллельным переносом мысленно смещать тело так, чтобы эта точка оказалась в начале координат. Угловой скоростью движущегося тела назовем угловую скорость получающегося мысленного вращения; от выбора отмечаемой точки результат не зависит.

Введем новое понятие:

ПОДВИЖНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА.

Формально это всякая система отсчета, отличающаяся от той, которую мы облюбовали и назвали неподвижной. На деле это понятие богаче. Начнем с того, что подвижную систему координат ξ, η, ζ можно трактовать как твердое тело, состоящее из некоторой движущейся (относительно неподвижной системы отсчета) точки A и приложенных к ней векторов $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, которые все

время образуют правый ортонормированный репер, в общем случае вращающийся. Обратно, если имеется (движущееся) твердое тело, то к нему можно жестко присоединить (подвижный) репер так, что в совокупности снова получится твердое тело. Обобщая, подвижную систему координат условимся мыслить как объемное твердое тело, в котором как бы нарисованы оси координат.

Будем считать, что в неподвижной и подвижной системах отсчета часы имеют одинаковые показания.

В каждое мгновение любой вектор Φ можно разложить и по неподвижному, и по подвижному реперу:

$$\Phi = \Phi_x e_x + \Phi_y e_y + \Phi_z e_z = \Phi_\xi e_\xi + \Phi_\eta e_\eta + \Phi_\zeta e_\zeta. \quad (4.7)$$

Если вектор $\Phi = \Phi(t)$, то могут быть вычислены его

$$\text{абсолютная производная: } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_x}{dt} e_x + \frac{d\Phi_y}{dt} e_y + \frac{d\Phi_z}{dt} e_z;$$

$$\text{относительная производная: } \frac{\delta\Phi}{\delta t} = \frac{d\Phi_\xi}{dt} e_\xi + \frac{d\Phi_\eta}{dt} e_\eta + \frac{d\Phi_\zeta}{dt} e_\zeta.$$

Эти два вектора связывает

ФОРМУЛА АБСОЛЮТНО-ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ:

$$\frac{d\Phi}{dt} = [\omega \times \Phi] + \frac{\delta\Phi}{\delta t}, \quad (4.8)$$

в которой $\omega(t)$ — угловая скорость подвижного репера e_ξ, e_η, e_ζ . Доказательство опирается на формулы Пуассона

$$\frac{de_\xi}{dt} = [\omega \times e_\xi], \quad \frac{de_\eta}{dt} = [\omega \times e_\eta], \quad \frac{de_\zeta}{dt} = [\omega \times e_\zeta], \quad (4.9)$$

легко вытекающие из (4) (в качестве точки P поочередно берутся концы векторов e_ξ, e_η, e_ζ). Дифференцируем тождество (7):

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d\Phi_\xi}{dt} e_\xi + \frac{d\Phi_\eta}{dt} e_\eta + \frac{d\Phi_\zeta}{dt} e_\zeta + \\ &+ \Phi_\xi \frac{de_\xi}{dt} + \Phi_\eta \frac{de_\eta}{dt} + \Phi_\zeta \frac{de_\zeta}{dt} = \end{aligned}$$

(подставляем формулы Пуассона)

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta\Phi}{\delta t} + \Phi_\xi [\omega \times e_\xi] + \Phi_\eta [\omega \times e_\eta] + \Phi_\zeta [\omega \times e_\zeta] = \\ &= \frac{\delta\Phi}{\delta t} + [\omega \times (\Phi_\xi e_\xi + \Phi_\eta e_\eta + \Phi_\zeta e_\zeta)], \end{aligned}$$

что и требовалось.

Угловую скорость подвижного репера принято раскладывать по нему самому:

$$\omega = p e_\xi + q e_\eta + r e_\zeta; \quad (4.10)$$

Мы не раз убедимся в том, что так удобнее. Вектор

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

называется угловым ускорением подвижного репера и связанного с ним твердого тела. Заметим, что

$$\frac{d\omega}{dt} = [\omega \times \omega] + \frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{\delta\omega}{\delta t},$$

т. е. абсолютная и относительная производные угловой скорости совпадают. Поэтому

$$\varepsilon = \dot{\rho}e_{\xi} + \dot{q}e_{\eta} + \dot{r}e_{\zeta},$$

а запись $\varepsilon = \dot{\omega}$ недвусмысленна.

Технический аппарат описан и сейчас будет использован для изложения центрального вопроса данной темы:

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА.

Пусть движение некоторой точки $P(t)$ рассматривается с точки зрения двух систем координат: неподвижной $Oxyz$ и подвижной $A\xi\eta\zeta$ (рис. 10). Движение последней назовем переносом и потому угловую скорость ω иногда будем обозначать $\omega_{\text{пер}}$. Пусть

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = xe_x + ye_y + ze_z, \quad \rho = \overline{AP} = \xi e_{\xi} + \eta e_{\eta} + \zeta e_{\zeta}.$$

Один наблюдатель регистрирует функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, другой — функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Соответственно для точки P вычисляются

$$\text{абсолютная скорость: } \mathbf{v}_{\text{абс}} = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z,$$

$$\text{относительная скорость: } \mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{\xi}e_{\xi} + \dot{\eta}e_{\eta} + \dot{\zeta}e_{\zeta},$$

$$\text{абсолютное ускорение: } \mathbf{a}_{\text{абс}} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z,$$

$$\text{относительное ускорение: } \mathbf{a}_{\text{отн}} = \ddot{\xi}e_{\xi} + \ddot{\eta}e_{\eta} + \ddot{\zeta}e_{\zeta}.$$

Чтобы связать их, будем дифференцировать по t тождество

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}.$$

Первый раз получим

$$\underbrace{\frac{d}{dt} OP}_{\mathbf{v}_{\text{абс}}} = \underbrace{\mathbf{v}_A}_{\mathbf{v}_{\text{пер}}} + \underbrace{[\omega \times \overline{AP}]}_{\mathbf{v}_{\text{пер}}} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta t} \overline{AP}}_{\mathbf{v}_{\text{отн}}}.$$

Итак, абсолютная скорость — сумма относительной и переносной:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}, \quad (4.11)$$

где

$$\text{переносная скорость } \mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_A + [\omega \times \overline{AP}].$$

Дифференцируем второй раз:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \overline{OP} = & \underbrace{a_A}_{a_{абс}} + \underbrace{[\varepsilon \times \overline{AP}] + [\omega \times [\omega \times \overline{AP}]]}_{a_{пер}} + \left] \frac{dv_A}{dt} \right. \\
 & \left. \right] \frac{d}{dt} [\omega \times \overline{AP}] \\
 & + \left[\omega \times \frac{\delta}{\delta t} \overline{AP} \right] + \\
 & + \left[\underbrace{\omega \times \frac{\delta}{\delta t} \overline{AP}}_{a_{кор}} + \underbrace{\frac{\delta^2}{\delta t^2} \overline{AP}}_{a_{отн}} \right] \frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta t} \overline{AP}
 \end{aligned}$$

так что абсолютное ускорение складывается из относительного, переносного и кориолисова (формула Кориолиса):

$$a_{абс} = a_{пер} + a_{отн} + a_{кор}, \quad (4.12)$$

где

переносное ускорение $a_{пер} = a_A + [\varepsilon \times \overline{AP}] + [\omega \times [\omega \times \overline{AP}]]$,

кориолисово ускорение $a_{кор} = 2 [\omega_{пер} \times v_{отн}]$.

Теперь надо осмыслить то, что мы получили формально.

Рассмотрим случай, когда оказалось, что точка P все время совпадает с некоторой точкой B того объемного твердого тела, которое мы условились мысленно присоединять к подвижной системе координат. В этом случае $v_{отн} \equiv 0$, $v_{абс} = v_B$; получается

формула Эйлера

$$v_B = v_A + [\omega \times \overline{AB}]. \quad (4.13)$$

Она гласит: чтобы вычислить скорость точки B — произвольной точки тела, достаточно знать скорость v_A некоторой отмеченной точки A и угловую скорость тела ω . Иначе говоря, формула Эйлера выражает распределение скоростей в твердом теле. Для ускорений справедлива

формула Ривальса

$$a_B = a_A + [\varepsilon \times \overline{AB}] + [\omega \times [\omega \times \overline{AB}]], \quad (4.14)$$

получающаяся из (12) также в предположении $P \equiv B$. Она выражает распределение ускорений в твердом теле (слагаемые в ней называются отмеченным, вращательным и осестремительным ускорениями).

Вернувшись к общему случаю, когда P перемещается относительно несущего тела, увидим, что переносная скорость (переносное ускорение) в каждое мгновение является абсолютной ско-

ростью (абсолютным ускорением) той очередной точки B несущего тела подвижной системы координат, в которой в это мгновение оказалась точка P . Чтобы предупредить те многочисленные ошибки, которые связаны с применением понятий переносной скорости и переносного ускорения, обратим внимание в первую очередь на то, что $\mathbf{v}_{\text{пер}}$, $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ в общем случае не являются скоростью и ускорением начала координат:

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} \neq \mathbf{v}_A, \mathbf{a}_{\text{пер}} \neq \mathbf{a}_A;$$

во вторую очередь на то, что $\mathbf{v}_{\text{пер}}$, $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ вообще не являются скоростью и ускорением какой-либо одной движущейся точки: в каждое мгновение это скорость и ускорение, вообще говоря, некоторой новой точки, нового следа, который точка P оставляет на твердом теле, связанном с подвижной системой координат.

Кориолисово ускорение также доставляет много хлопот. В нем странно все: и множитель 2, и векторные сомножители, один из которых — переносная угловая скорость тела, другой, наоборот, — относительная линейная скорость точки (добавим на всякий случай, что выражения «угловая скорость точки» и «скорость тела» в равной степени некорректны).

«Сравнительная» кинематика точки нами построена. Заодно мы установили распределение скоростей и ускорений в произвольном твердом теле. В дальнейшем нам потребуется

обращение формулы Эйлера.

Пусть Ω — угловая скорость непрямолинейного тела $\mathcal{E}$, и распределение скоростей в этом теле дается формулой

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + [\Omega \times \overline{PQ}].$$

Допустим, что то же самое распределение скоростей дается другой формулой аналогичного вида:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{u} + [\Psi \times \overline{SQ}], \quad S \in \mathcal{E}.$$

Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_S, \quad \Psi = \Omega.$$

Первое утверждение тривиально (подставить $Q=S$). Теперь

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + [\Omega \times \overline{PS}] + [\Psi \times \overline{SQ}] = \mathbf{v}_P + [\Omega \times \overline{PQ}],$$

$$[\Psi \times \overline{SQ}] = [\Omega \times (\overline{PQ} + \overline{SP})],$$

$$[(\Psi - \Omega) \times \overline{SQ}] \equiv 0.$$

Если $\Psi - \Omega \neq 0$, то существует такая точка Q , что $SQ \neq 0$, $SQ \nparallel \Psi - \Omega$. Тогда $[(\Psi - \Omega) \times \overline{SQ}] = 0$. Противоречие.

Кстати, из обращения формулы Эйлера снова следует, что угловая скорость тела не зависит от выбора отмеченной точки.

Допустим теперь, что тело $\mathcal{E}$ имеет абсолютную угловую скорость $\Omega_{\text{абс}}$ в неподвижной системе отсчета и относительную угловую скорость $\Omega_{\text{отн}}$ в подвижной системе отсчета (см. рис. 10).

В свою очередь подвижная система координат, напомним, имеет угловую скорость $\omega = \omega_{\text{пер}}$ относительно неподвижной. Покажем, что

$$\Omega_{\text{абс}} = \omega_{\text{пер}} + \Omega_{\text{отн}}, \quad (4.15)$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна сумме относительной и переносной (звучит аналогично (11)). Действительно, пусть P , Q — отмеченная и произвольная точки нашего тела $\mathcal{B}$. Тогда по формуле Эйлера

$$\mathbf{v}_Q^{\text{отн}} = \mathbf{v}_P^{\text{отн}} + [\Omega_{\text{отн}} \times \overline{PQ}].$$

Кроме того,

$$\mathbf{v}_Q^{\text{пер}} = \mathbf{v}_A + [\omega_{\text{пер}} \times \overline{AQ}] = \mathbf{v}_A + [\omega_{\text{пер}} \times \overline{AP}] + [\omega_{\text{пер}} \times \overline{PQ}].$$

В силу (11)

$$\mathbf{v}_Q^{\text{абс}} = \mathbf{v}_Q^{\text{пер}} + \mathbf{v}_Q^{\text{отн}}.$$

После подстановки сюда предшествующих формул получим

$$\mathbf{v}_Q^{\text{абс}} = \mathbf{u} + [(\Omega_{\text{отн}} + \omega_{\text{пер}}) \times \overline{PQ}],$$

и осталось сослаться на обращение формулы Эйлера.

Формула (15) вместе с частным выражением для угловой скорости (6) является важным средством вычисления угловых скоростей в задачах.

Коротко об угловых ускорениях. Продифференцируем (15):

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\text{абс}} = \dot{\omega}_{\text{пер}} + \frac{\delta}{\delta t} \Omega_{\text{отн}} + [\omega_{\text{пер}} \times \Omega_{\text{отн}}]. \quad (4.16)$$

Смысл слагаемых ясен.

Формулы (11), (12), (15), (16) называются формулами сложения. Во всех формулах, относящихся к скоростям, — (11), (13), (15) — по два слагаемых, а относящихся к ускорениям — (12), (14), (16) — по три. При этом в формуле для ускорения есть два слагаемых, по смыслу аналогичных членам в формуле для скоростей, а третье слагаемое имеет вид «стрannого» векторного произведения.

В заключение покажем, как от векторных формул (11) — (16) перейти к соотношениям в координатах. Пусть $Q(t)$ — матрица перехода от репера $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ к реперу $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ (по столбцам стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе). Тогда формуле (7) можно придать вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi_\eta \\ \Phi_\zeta \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Если в формуле (10) мы обозначим $\overline{OA} = 1$, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} l_x + \xi \\ l_y + \eta \\ l_z + \zeta \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Аналогично (11) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{i}_x \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_z \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} q\zeta - r\xi \\ r\xi - p\zeta \\ p\eta - q\xi \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

и так далее.

Следующим этапом для нас будет

ДИНАМИЧЕСКОЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА.

Систему координат $Oxyz$ будем считать инерциальной, т. е. примем, что материальная точка, не подвергающаяся никаким воздействиям, движется в этой системе координат с нулевым ускорением. Это — допущение, которое на практике можно проверить лишь с точностью, присущей принятому способу измерений и в рамках, определяемых нашим умением распознавать воздействия. Коль скоро воздействия описаны (в рамках некоторой модели или сочетания моделей), мы можем дать выражения для силы, действующей на точку, и выписать уравнение движения

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t).$$

Посмотрим, какой вид примет это уравнение, если мы перейдем в подвижную систему координат $A\xi\eta\zeta$. Во-первых, мы должны разложить вектор $\mathbf{F}$ по векторам $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ и в выражении его сделать подстановку, выражая $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$ через $(\dot{\rho}, \rho) = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta)$ по формулам (18) и (19). Во-вторых, мы должны заменить вектор $\mathbf{r}$ его представлением по формуле сложения ускорений. В результате придем к

$$m \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} + m(\mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}) = \mathbf{F}^*(\dot{\rho}, \rho, t).$$

Если мы уберем внешние воздействия, т. е. обратим силу $\mathbf{F}$ в нуль, то получим, что в подвижной системе координат ускорение при этом вовсе не обязано быть равным нулю, т. е. подвижная система отсчета, вообще говоря, не является инерциальной. Тот факт, что

$$m \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} \neq \mathbf{F}^*(\dot{\rho}, \rho, t),$$

означает попросту, что закон Ньютона в подвижной системе координат места не имеет. С тем, чтобы все-таки сохранить его, примем, что после замены системы отсчета на точку начинают действовать

$$\text{силы инерции} \begin{cases} \Phi_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}_{\text{пер}}, \\ \Phi_{\text{кор}} = -m\mathbf{a}_{\text{кор}}, \end{cases}$$

называемые соответственно переносной и кориолисовой. Теперь

$$m \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} = \mathbf{F}^* + \Phi_{\text{пер}} + \Phi_{\text{кор}}. \quad (4.20)$$

В качестве примера рассмотрим

ПАДЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ЗЕМЛЮ.

Будем считать, что Земля — однородный шар, равномерно вращающийся ($\omega = \omega e_z = \text{const}$) вокруг неподвижного своего центра ($A=0$). Тогда

$$\Phi_{\text{пер}} = -m[\omega \times [\omega \times \rho]], \quad \Phi_{\text{кор}} = -2m\left[\omega \times \frac{\delta \rho}{\delta t}\right].$$

Уясним сначала, что такое сила тяжести. Ясно, что это та сила, которая уравнивается натяжением нити у маятника, покоящегося относительно Земли. Следовательно, сила тяжести есть векторная сумма гравитационного тяготения и переносной силы инерции (кориолисова обращается в нуль) и вовсе не направлена к центру Земли, как мы привыкли думать (рис. 21):

$$mg = -\frac{fMm}{r} e_p - m\omega^2 [e_z \times [e_z \times \rho]].$$

В пределах небольшой окрестности любого места Q вблизи поверхности Земли ускорение силы тяжести g можно считать постоянным. Положим $q = \overline{OQ} + \sigma$; закон Ньютона принимает вид

$$\frac{\delta^2 \sigma}{\delta t^2} = g - 2\left[\omega \times \frac{\delta \sigma}{\delta t}\right].$$

Рассмотрим падение точки с нулевой начальной скоростью. Для этого нецелесообразно выписывать точное решение уравнений движения (которые линейны), так как рассмотрение имеет смысл только в течение небольшого промежутка времени, пока точка не упадет на поверхность Земли. Поэтому разложим решение в ряд Тейлора по t :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 t + \frac{1}{2} \sigma_2 t^2 + \frac{1}{6} \sigma_3 t^3 + O(t^4).$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$ в силу начальных условий и

$$\frac{\delta \sigma}{\delta t} = \sigma_2 t + \frac{1}{2} \sigma_3 t^2 + O(t^3),$$

$$\frac{\delta^2 \sigma}{\delta t^2} = \sigma_2 + \sigma_3 t + O(t^2).$$

После подстановки в уравнение движения получаем

$$\sigma_2 + \sigma_3 t = g - 2[\omega \times \sigma_2 t] + O(t^2),$$

$$\sigma_2 = g, \quad \sigma_3 = -2[\omega \times g].$$

Вывод: в соответствующем приближении точка будет падать вниз с ускорением g , одновременно отклоняясь на восток. Это легко понять «на пальцах»: пока скорость мала, мала и сила Кориолиса, и действует только сила mg , так что точка падает практически равноускоренно. При этом, однако, скорость падения растет,

и в конце концов появляется ощутимая боковая сила Кориолиса, которая отклоняет точку от вертикали в направлении своего действия. Конечно, это рассуждение не есть доказательство. (В частности, оно неявно использует так называемый принцип независимости действия сил, который, вообще говоря, неверен и представляет собой ошибочную трактовку принципа суперпозиции.)

Обратим внимание на следующую формальную аналогию: сила

$$\Phi_{\text{кор}} = [\mathbf{v}_{\text{отн}} \times (-2m\boldsymbol{\omega})]$$

по структуре тождественна силе Лоренца, действующей на заряд в однородном магнитном поле:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{v} \times \frac{q\mathbf{B}}{c} \right]$$

(ассоциировать переносную силу инерции с электрической составляющей силы Лоренца не стоит, так как $\text{div } \Phi_{\text{пер}} \neq 0$).

В качестве первого приложения этой аналогии рассмотрим

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ

В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

Пусть в системе координат $O\xi\eta\zeta$ на точку действует сила

$$\mathbf{F}_1 = -K\boldsymbol{\rho},$$

причем она может быть и отталкивающей (при $K < 0$). Кроме того, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F}_2 = [\mathbf{v} \times \mathbf{C}], \quad \mathbf{C} = q\mathbf{B}/c = C\mathbf{e}_z.$$

Будем рассматривать движение в плоскости $O\xi\eta$. Указанная аналогия позволяет интерпретировать силу Лоренца как силу Кориолиса, возникшую за счет того, что система координат $O\xi\eta\zeta$ вращается относительно «неподвижной» системы координат $Oxyz$ вокруг оси $O_z = O_\zeta$ с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}}{2mc}.$$

В системе $Oxyz$ на точку действовала сила

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_1 - \Phi_{\text{пер}} = \mathbf{F}_1 + m[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}]] = \\ &= -K\boldsymbol{\rho} - m\omega^2\boldsymbol{\rho} = -(K + m\omega^2)\mathbf{r} \end{aligned}$$

(здесь $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}$). Это снова упругая сила:

$$\mathbf{F}_0 = -\kappa\mathbf{r}, \quad \kappa = K + m\omega^2.$$

Может статься, что $K < 0$, а $\kappa > 0$. Тогда в системе Oxy траектории суть эллипсы, а в системе $O\eta\xi$ точка движется как бы по вращающемуся эллипсу: траектория ограничена, система устойчива. Если мы выключим магнитное поле, то будет $\omega = 0$, останется только отталкивающая сила, и система станет неустойчивой.

Коротко можно сделать такой вывод: наложение сильного магнитного поля на отталкивающую упругую силу может превратить

неустойчивую систему в плоскости в устойчивую (эффект Кельвина). Здесь важно, что движение плоское. Неустойчивость по координате z , если мы выйдем из плоскости, компенсировать не удастся, так как сила Лоренца в направлении Oz не действует ($m\ddot{z} = -Kz$).

За этой модельной задачей стоит теорема из теории устойчивости. Еще одну теорему проиллюстрирует другой пример:

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЫ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ.

Пусть к F_1 и F_2 из предыдущего примера добавилась сила

$$F_3 = -c\dot{\varphi}.$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда $K < 0$, но система тем не менее устойчива. В теме 2 мы видели, что наложение вязкого трения на устойчивый гармонический осциллятор превращает систему в асимптотически устойчивую. Здесь же, как это ни удивительно на первый взгляд, добавление вязкого трения превратит систему снова в неустойчивую (второй эффект Кельвина). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим собственные числа получающейся линейной системы уравнений движения: ее можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & C \\ -C & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + c\lambda + K & C\lambda \\ -C\lambda & m\lambda^2 + c\lambda + K \end{vmatrix} = (m\lambda^2 + c\lambda + K)^2 + C^2\lambda^2 = 0.$$

Для устойчивости линейной системы необходимо, чтобы все корни этого уравнения лежали в левой полуплоскости. Тогда и их сумма, и сумма тройных произведений (равная коэффициенту при λ с обратным знаком) должны быть неположительны. Последняя, однако, равна $-2cK > 0$, что и доказывает неустойчивость.

Отмеченной аналогии между силой Кориолиса и силой Лоренца можно поручить более серьезную роль.

Если мы посмотрим, как были введены силы инерции, то увидим, что это было сделано искусственно, с целью сохранить закон Ньютона, и что мы не указали никаких внешних воздействий на точку, которым отвечали бы силы инерции. По этой причине силы инерции часто называют псевдосилами. Логически — в узких рамках классической механики — это оправдано, но все же звучание термина вызывает некоторый протест. Как на практике отличить псевдосилы от подлинных? Силу Кориолиса от силы Лоренца? Строго говоря, отклонение падающего камня от вертикали еще не доказывает вращения Земли, так как это отклонение

может быть вызвано сильным электромагнитным полем. Разумеется, последнее можно опровергнуть, но средствами, лежащими вне механики: например, проверить, что камень электрически нейтрален. И даже при этом более широком взгляде на вещи мы должны быть уверены, что наш каталог воздействий достаточно полон, в силу чего пресловутое отклонение не вызывается никакой третьей причиной.

Таким образом, трактовка сил инерции как фиктивных не может возводиться в абсолют: она имеет смысл лишь постольку, поскольку мы какие-то системы отсчета согласились считать инерциальными и лишь в той мере, в какой классическая механика применима вообще.

Нам осталось описать системы отсчета (ξ, η, ζ, τ) , при переходе к которым, силы инерции не появляются, т. е. описать

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ.

Сначала посмотрим, нельзя ли пользоваться разными часами. Если мы положим $t=f(\tau)$, то получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = f' \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = f'^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + f'' \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Таким образом, перед ускорением появляется множитель и прибавляется еще дополнительное слагаемое. Если мы хотим сохранить закон Ньютона, то должны потребовать

$$f' \equiv 1, \quad t = \tau + \text{const.}$$

Более общие замены времени (например, вида $t=f(\tau, \xi, \eta, \zeta)$), не будем рассматривать, так как они противоречат постулату об универсальности времени.

Теперь представим замену системы отсчета аналитически и вспомним, что силы инерции равны нулю в том случае, если начало подвижной системы — точка A — движется с нулевым ускорением, а оси не вращаются ($\omega_{\text{пер}} \equiv 0$). Получим частный вариант формул (18) вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u\tau \\ b + v\tau \\ c + w\tau \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad t = t_0 + \tau, \quad (4.21)$$

в котором все буквенные параметры и ортогональная матрица Q постоянны. Если имеется замена системы отсчета вида (21), то уравнение Ньютона остается инвариантным. Это значит, что если силу выразить через $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta, \tau$, разложить по векторам $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$:

$$\mathbf{F} = F_\xi \mathbf{e}_\xi + F_\eta \mathbf{e}_\eta + F_\zeta \mathbf{e}_\zeta$$

и написать уравнения

$$m\ddot{\xi} = F_\xi(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta, \tau),$$

$$m\ddot{\eta} = F_\eta(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta, \tau),$$

$$m\ddot{\zeta} = F_\zeta(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta, \tau),$$

то они снова будут правильными (система (ξ, η, ζ, τ) — тоже инерциальная). Преобразования вида (21) образуют группу, которая называется группой Галилея. Коротко говорят так: вид закона Ньютона сохраняется при преобразованиях Галилея.

Добавление к теме 4. ЕЩЕ О КИНЕМАТИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В движущемся твердом теле (если считать его сколь угодно большим) всегда существуют такие точки C , скорость которых v_C параллельна вектору угловой скорости ω . При $\omega \neq 0$ достаточно взять, например, точку C такую, что

$$\overline{AC} = \frac{[\omega \times v_A]}{\omega^2}.$$

Легко видеть, что если C' — другая точка с тем же свойством, то $\overline{CC'} = \lambda \omega$ и $v_{C'} = v_C$. Прямая, образуемая точками C , называется осью мгновенно-винтового движения, или винтовой осью (смысл термина в том, что по распределению скоростей в данное мгновение невозможно установить, совершает ли тело постоянное винтовое или более сложное движение).

В случае, когда $v_C = 0$, говорят о мгновенном вращении и его оси. Обычно точку с нулевой скоростью можно усмотреть, когда

а) одна точка тела просто все время неподвижна;

б) движение плоское: C — точка пересечения мгновенной оси вращения с плоскостью, называемая мгновенным центром скоростей или мгновенным центром вращения; его легко построить геометрически (рис. 9), исходя из $v_A \perp \overline{CA}$, $|v_A| = \omega |\overline{CA}|$;

в) происходит качение (без проскальзывания) тела по неподвижной поверхности. Пусть C — точка касания. Скорость той точки P тела, которая оказалась в C , по определению равна нулю, т. е.

$$v_A = [\omega \times \overline{CA}]. \quad (4.22)$$

Однако сама точка C как видимый образ (рис. 11, 12) имеет, вообще говоря, ненулевую скорость:

$$u_C = \frac{d}{dt} \overline{OC}.$$

После дифференцирования тождества (4.22) получаем

$$a_A = [\omega \times (v_A - u_C)] + [\varepsilon \times \overline{CA}].$$

Точка A была отмечена произвольно, и в частности, может совпасть с точкой C . Отсюда ускорение в точке касания:

$$a_{P=C} = -[\omega \times u_C].$$

Эта малоизвестная формула бывает полезной при решении задач о распределении ускорений в твердом теле.

Тема 5

СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ С ТРЕНИЕМ

Рассмотрим класс модельных задач, описывающих движение одной материальной точки. Уравнения Ньютона имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{y} &= Y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{z} &= Z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Мы не ставим задачу решить эти уравнения, так как в общем случае это невозможно. Поэтому наметим более расплывчатую, но зато более реальную и вместе с тем достойную цель: искать качественные заключения о движении.

Например, полезно узнать, действует в данной задаче закон сохранения энергии или нет. С точки зрения физики это означает проверку того, сохраняется ли в задаче механическая форма энергии, ибо в узких рамках классической механики выражения типа «энергия превращается в тепло» не имеют смысла. Поэтому нам предпочтительнее говорить не «закон сохранения» (раз уж это не совсем закон), а «**первый интеграл** уравнений движения». В общем виде это функция $\Phi(\dot{r}, r, t)$ такая, что если $(x(t), y(t), z(t))$ есть произвольное решение уравнений (1), то сложная функция времени

$$\Phi(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), x(t), y(t), z(t), t)$$

всякий раз постоянна (но получающаяся константа, конечно, может быть разной для разных движений). В частности,

ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

$$H = \frac{mv^2}{2} + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z). \quad (5.2)$$

Он имеет вполне определенную аналитическую структуру. Первое слагаемое $T = mv^2/2$ зависит только от скорости и называется кинетической энергией, второй зависит только от положения (и не зависит от времени) и называется потенциальной энергией. Подставим в H произвольное решение уравнений (1) и полученную сложную функцию продифференцируем по времени:

$$\frac{dH}{dt} = m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}}_{\frac{dV}{dt}}.$$

Заменяя $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}$ их выражениями из уравнений (1), получим

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}}_{(F, \dot{r})} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}}_{-(\text{grad } V, \dot{r})} =$$

$$= \left(X + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \dot{x} + \left(Y + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \dot{y} + \left(Z + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \dot{z}.$$

Отсюда следует

Теорема. А. Вдоль движения всегда

$$\frac{dT}{dt} = (\mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Б. Если дано консервативное поле сил, т. е. если

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V, \quad V = V(x, y, z),$$

то имеет место интеграл энергии.

Условие Б достаточно, но отнюдь не необходимо (скоро мы это обсудим). Консервативное поле потенциально (см. тему 4), и при этом потенциал не зависит от времени.

Примеры консервативных сил:

1) сила тяжести: $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z \Rightarrow V = mgz$;

2) сила упругости:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \\ -kz \end{pmatrix} \Rightarrow V = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{kr^2}{2};$$

3) сила гравитации:

$$\mathbf{F} = -\frac{fMm}{r^3} \mathbf{r} \Rightarrow V = -\frac{fMm}{r}.$$

Возможны случаи, когда интеграл энергии заведомо не может существовать. Например, если к силе, зависящей только от положения, добавляется сила вязкого трения $-\mathbf{c}\mathbf{v}$. Тогда в выражении dH/dt появится слагаемое вида $-\mathbf{c}\mathbf{v}^2$, которое квадратично зависит от скорости и не может быть компенсировано другими слагаемыми, которые от скорости зависят линейно.

Для существования интеграла энергии вполне достаточно, чтобы было $(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv -\dot{V}$. Назовем силу $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$ аэргической (греч. «эргос» — работа), если

$$(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0.$$

Ясно, что прибавление ее к силе $\mathbf{F} = -\text{grad } V$ не нарушит наличия интеграла энергии, хотя движения станут другими. Например, магнитная составляющая силы Лоренца $\mathbf{F} = (q/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ является аэргической силой, так как $([\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \mathbf{v}) \equiv 0$. Мы уже столкнулись с этим при исследовании движений в однородном магнитном поле: интеграл энергии сводится к $mv^2/2 = \text{const}$, как и для движения в отсутствие всяких сил.

Иного рода пример аэргической силы доставит нам

ДВИЖЕНИЕ ПО НЕПОДВИЖНОЙ НЕШЕРОХОВОТОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Допустим, что уравнение

$$f(x, y, z) = 0$$

задает поверхность $\mathfrak{M}$, регулярную в каждой своей точке:

$$\text{grad } f|_{\mathfrak{M}} \neq 0.$$

Примем, что

- а) на точку действует сила $\mathbf{F}$;
- б) точка обязана оставаться на поверхности.

Будем внимательны: сейчас должен быть очерчен новый подход к описанию воздействий на точку. Если раньше мы считали своим долгом явно, при помощи формул указать все силы, то теперь одно из воздействий описываем его результатом: точка остается на поверхности, и все. Говорят, что на точку **наложена связь**.

Ясно, что теперь $m\ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{F}$, и определение движений нам придется давать заново. Примем следующие постулаты:

- А. Влияние связи сводится к появлению некоторой новой силы $\mathbf{R}$ (силы реакции связи), так что имеет место закон Ньютона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

(Ясно, что этого недостаточно. Подбирая неизвестную нам силу, можно реализовать любое движение на поверхности.)

- Б. Взаимодействие точки с поверхностью таково, что в силе $\mathbf{R}$ отсутствуют слагаемые вида $-c(\mathbf{v})\mathbf{v}$, т. е. не возникает сила сопротивления, сила трения; если говорить формально, то по определению сила $\mathbf{R} \perp \mathfrak{M}$ (рис. 3). Это можно записать так:

$$\mathbf{R} = \lambda \text{grad } f.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \\ f(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Надо искать четверки функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\lambda(t)$, удовлетворяющие этой системе. Согласно определению силы реакции, она является аэргической, так как всегда ортогональна скорости. Если $\mathbf{F} = -\text{grad } V(\mathbf{r})$, то движение по поверхности обладает интегралом энергии (2).

Аналогично можно рассмотреть

ДВИЖЕНИЕ ПО НЕПОДВИЖНОЙ НЕСЕРОХОВАТОЙ КРИВОЙ,

задав ее системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

и представляя силу реакции в виде

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

Эффективнее другой путь. Зададим кривую параметрически: $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(q)$, введем натуральный параметр

$$s = \int_{q_0}^q \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{dq}\right)^2} dq,$$

перепишем уравнение кривой в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(s)$ и воспользуемся репером Френе (зависящим от s):

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{e}_\nu = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \mathbf{e}_\beta = [\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_\nu].$$

Величина (функция s)

$$\rho = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1} = \rho(s).$$

называется радиусом кривизны кривой. Ускорение (если формула, задающая движение, имеет вид $s = s(t)$) будет

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s} \mathbf{e}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{e}_\nu,$$

так что векторное уравнение Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} + \mathbf{F}$, $\mathbf{R} \perp \mathbf{e}_\tau$, примет форму равносильной системы скалярных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau, \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu + R_\nu, \\ 0 = F_\beta + R_\beta. \end{cases} \quad (5.4)$$

Компонента F_τ в силу $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(s)$, $\dot{\mathbf{r}} = (d\mathbf{r}^*/ds) \dot{s}$ есть функция $\dot{s}$, s , t . Поэтому для вычисления движения по кривой надо решить одно дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m\ddot{s} = F_\tau(\dot{s}, s, t), \quad (5.5)$$

а остальные уравнения из системы (4) позволят узнать силу $\mathbf{R}$ как функцию времени. Как функция $\dot{s}$, s она уже известна:

$$R_\nu = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_\nu, \quad R_\beta = -F_\beta. \quad (5.6)$$

Интеграл энергии (2) в случае, когда поле сил $\mathbf{F}$ консервативно, снова имеет место. Пользуясь параметрическим заданием кривой, мы можем записать этот интеграл короче:

$$H = \frac{m\dot{s}^2}{2} + V(s). \quad (5.7)$$

Это выражение отличается от (2) тем, что в нем полностью ис-

пользовано наличие связи, тогда как (2) без уравнения $f=0$ имеет другой смысл: это интеграл энергии для свободной точки.

На примере кривой покажем теперь, как производить

УЧЕТ ТРЕНИЯ

в ситуации, когда есть основания полагать, что взаимодействие с кривой сопряжено с появлением дополнительной касательной силы. Итак, пусть $\mathbf{R}$ — сила, моделирующая воздействие кривой на точку. Для простоты будем считать кривую плоской. Тогда

$$m\ddot{s} = F_\tau + R_\tau, \quad m\dot{s}^2/\rho = F_v + R_v. \quad (5.8)$$

Сила $R_\tau = R_\tau \mathbf{e}_\tau$ называется силой трения, сила $R_v = R_v \mathbf{e}_v$ — силой нормального давления (рис. 4). Основными являются две модели. Во-первых,

вязкое трение:

кривая характеризуется коэффициентом $c(v)$, так что $R_\tau = -c(v)v$. Тогда сначала надо решать уравнение типа (5):

$$m\dot{s} = F_\tau - c(\dot{s})\dot{s}, \quad (5.9)$$

после чего R_v , если надо, вычисляется отдельно. Во-вторых,

сухое трение:

кривая характеризуется коэффициентом трения k так, что

$$v \equiv 0 \Leftrightarrow |F_\tau| \leq k |F_v|$$

(поскольку получается $\mathbf{F} + \mathbf{R} \equiv 0$, эквивалентно можно написать, что $|R_\tau| \leq k |R_v|$; вспомним школьную задачу про брусок на плоскости);

$$v \neq 0 \Rightarrow R_\tau = -k |R_v| v/v;$$

следовательно, из (8)

$$m\ddot{s} = F_\tau - \text{sign } \dot{s} \left| \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_v \right|. \quad (5.10)$$

Уравнение (10) сложно; даже если сила $\mathbf{F}$ зависит только от положения s , правая часть все равно зависит от скорости, причем квадратичным образом — уравнение (10), вообще говоря, не линейно. Кроме того, правая часть (10) имеет разрыв при $\dot{s}=0$, так что решать (10) необходимо «по кускам»: отдельно для $\dot{s}>0$, $\dot{s}<0$. Правда, уравнение (10) можно свести к линейному (с переменными коэффициентами) уравнению для зависимости $v^2=f(s)$. В самом деле,

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Аналитические трудности все равно остаются большими. Приведем задачу, которая иллюстрирует уравнение (9) и вместе с тем дает простой пример уравнения типа (10):

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ.

Точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести и силы сопротивления, которая направлена противоположно скорости и пропорциональна ее квадрату. Тогда

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda \dot{z} |\dot{z}| \quad (5.11)$$

(ось z направлена вверх). Параметры задачи положительны, и

$$[m] = M, \quad [g] = L/T^2, \quad [\lambda] = M/L.$$

Видим, что m , g , λ размерно независимы; в процессе решения уравнения движения их можно будет приравнять к единице.

1. Найти $v(t)$, если $v(0) = 0$ (падение). Положим $m = g = \lambda = 1$. При $v = \dot{z} < 0$ из (11)

$$\frac{dv}{dt} = -1 + v^2, \quad \frac{dv}{1 - v^2} = -dt, \quad (5.12)$$

откуда в силу $v(0) = 0$ получаем

$$\ln \frac{1+v}{1-v} = -2t, \quad v = \frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2t} + 1} = \operatorname{th} t.$$

Поскольку

$$[v] = \left[\sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \right], \quad [t] = \left[\sqrt{\frac{m}{g\lambda}} \right],$$

общий результат

$$v = - \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{\lambda g}{m}} t.$$

2. Пусть точка брошена вверх со скоростью v_0 . На какую максимальную высоту h она поднимается?

Будем искать зависимость $v = v_*(z)$. Имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dz} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Полагаем $m = g = \lambda = 1$ и $v \geq 0$. Из (11)

$$\frac{d}{dz} \frac{v^2}{2} = -1 - v^2, \quad \frac{d(v^2)}{1 + v^2} = -2, \quad (5.13)$$

откуда после интегрирования

$$\frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = -z + C.$$

При $z = 0$ получаем $2C = \ln(1 + v_0^2)$, а при $z = C$ имеем $v = 0$. Следовательно, C и есть h . Поскольку

$$[h] = \left[\frac{m}{\lambda} \right], \quad [v_0] = \left[\sqrt{mg/\lambda} \right],$$

в общем случае

$$h = \frac{m}{2\lambda} \ln \left(1 + \frac{\lambda v_0^2}{mg} \right). \quad (5.14)$$

Чтобы не ограничиваться формальным ответом, дадим простой качественный комментарий. Предположим, что мы имеем шары одинаковых размеров (тогда, согласно примеру из темы 1, коэффициент λ у них один и тот же), но разных масс.

При бросании вниз скорость всегда стремится к пределу $-\sqrt{mg/\lambda}$, т. е. оба шара довольно скоро падают практически равномерно, но более тяжелый — быстрее.

Теперь допустим, что шары бросили вверх с одинаковыми скоростями. Преобразуем (14), исходя из разложения

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + O(z^3).$$

Получим

$$h(\lambda) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{\lambda v_0^4}{4mg^2} + O\left(\frac{\lambda^2 v_0^4}{m^2 g^2}\right).$$

При $\lambda=0$ эта формула дает высоту подъема в одном только поле тяжести, которая от массы не зависит. При $\lambda \neq 0$ (на практике λ довольно мал) относительное изменение высоты

$$\frac{h(\lambda) - h(0)}{h(0)} \approx -\frac{\lambda v_0^2}{2mg},$$

так что более тяжелый шар потеряет в высоте меньше.

Добавление к теме 5. ОБ ОДНОСТОРОННИХ СВЯЗЯХ

Поверхность делит пространство на две области. Из постановки конкретной задачи часто вытекает, что движущаяся точка может сойти с уровня $f=0$ (например, с поверхности твердого тела), но только в одну из них. Это можно записать в виде условия типа $f \geq 0$. Если вектор нормали направить в соответствующую сторону, то связь будет сохраняться, пока $R_n \geq 0$ (при этом точка как бы давит на поверхность).

Аналогичное замечание справедливо для плоской кривой.

Тема 6

ОДНОМЕРНЫЕ КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Мы будем рассматривать решения уравнения Ньютона

$$m\ddot{s} = F(\dot{s}, s, t) \quad (6.1)$$

в предположении, что имеет место интеграл энергии. Правую часть (1) считаем достаточно гладкой.

Теорема. Уравнение (1) имеет первый интеграл вида

$$H = \frac{m\dot{s}^2}{2} + V(s) \quad (6.2)$$

тогда и только тогда, когда

$$F = F(s).$$

При этом

$$V(s) = - \int F(s) ds.$$

Доказательство. Пусть $s(t)$ — движение. Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H\left(\frac{ds}{dt}, s(t)\right) &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt} V(s(t)) = \\ &= m \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + V'(s(t)) \frac{ds}{dt} = \left[F\left(\frac{ds}{dt}, s(t), t\right) + V'(s(t)) \right] \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Тождественный нуль получим тогда и только тогда, когда

$$[F(\dot{s}, s, t) + V'(s)] \dot{s} \equiv 0.$$

При $\dot{s} \neq 0$ это значит, что

$$F(\dot{s}, s, t) = -V'(s),$$

а при $\dot{s} = 0$ по непрерывности верно то же самое. Полученное выражение для F и доказывает теорему.

Потенциальная энергия V определена с точностью до постоянной. То, что $F = F(s)$, имеет такие следствия: решения уравнения Ньютона допускают

А) сдвиг по времени: если $s(t)$ — движение, то и $s(t + \tau)$ тоже движение (свойство автономности);

Б) инверсию времени: если $s(t)$ — движение, то и $s(-t)$ тоже движение.

Для каждого движения $s(t)$ имеем $H(\dot{s}(t), s(t)) = h$, где константа h определяется по начальным условиям или задается из каких-либо других соображений. Поскольку $m\dot{s}^2/2 \geq 0$, при движении всегда выполняется неравенство $V(s(t)) \leq h$.

ОБЛАСТЬ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ:

$$\mathfrak{M}^h = \{s : V(s) \leq h\}$$

состоит, вообще говоря, из нескольких связных кусков (рис. 42); в случае, когда один из кусков есть замкнутый отрезок (справа на рис. 42), говорят о движении в потенциальной яме; предполагается, что внутри этого отрезка $V(s) < h$.

Как известно, важным моментом при построении графика функции $V(s)$ является отыскание множества ее критических точек:

$$\{s^* : V'(s^*) = 0\}.$$

Поскольку уравнение Ньютона у нас в силу теоремы имеет вид

$$m\ddot{s} = -V'(s), \quad (6.3)$$

видим, что критические точки потенциальной энергии имеют прозрачный динамический смысл — каждая из них есть **положение равновесия**: движение $s(t) \equiv s^*$ возможно тогда и только тогда, когда $V'(s^*) = 0$. Энергия равновесия равна

$$h^* = V(s^*).$$

Это — соответствующее s^* критическое значение функции. При

изменении h область возможности движения $\mathfrak{M}^h$ тоже меняется, а когда h проходит критическое значение h^* , то, вообще говоря, меняется число связных компонент у $\mathfrak{M}^h$.

Будем говорить, что точка $s_i = s(t_i)$ есть **точка остановки** (точка поворота) для движения $s(t)$, если $\dot{s}(t_i) = 0$, и при этом

$$V'(s_i) \neq 0. \quad (6.4)$$

Заметим, что тогда $V(s_i) = h$, т. е. мы выходим на границу $\mathfrak{M}^h$. Разложим $s(t)$ в ряд Тейлора в окрестности t_i :

$$s(t) = s_i + \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=t_i} (t - t_i) + \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right)_{t=t_i} \frac{(t - t_i)^2}{2} + O((t - t_i)^3),$$

и воспользуемся (3) с учетом (4):

$$s(t) = s_i - \frac{V'(s_i)}{m} \frac{(t - t_i)^2}{2} + O((t - t_i)^3).$$

При достаточно малых $t - t_i$ изменение $s(t)$ будет определяться вторым слагаемым. Таким образом, движение доходит до точки остановки (до границы $\mathfrak{M}^h$) и поворачивает назад (рис. 43).

Движение $s(t)$ однозначно определяется начальными условиями $s_0, \dot{s}_0$. Сейчас мы уже знаем, что если $\dot{s}_0 = 0$, то движение либо вечно останется в точке s_0 (при $V'(s_0) = 0$), либо покинет эту точку (при $V'(s_0) \neq 0$) практически равноускоренно. Впредь будем считать $\dot{s}_0 \neq 0$. Тогда ds/dt сохраняет знак в течение некоторого интервала времени, и из интеграла энергии в области $V < h$ (строго меньше) получим

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (h - V(s))}, \quad (6.5)$$

так что $s = s(t)$ — монотонная функция и имеет обратную $t = t(s)$. Ее можно найти:

$$\pm \frac{ds}{\sqrt{(2/m)(h - V(s))}} = dt, \quad t - t_0 = \pm \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{2/m(h - V(s))}}. \quad (6.6)$$

Чтобы получить $s(t)$, нам надо проделать алгебраические действия, вычислить определенный интеграл и взять обратную функцию. Решение с помощью этих операций составляет

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ,

которое, как правило, неисполнимо в элементарных функциях.

Теорема. Пусть движение $s(t)$ с энергией h происходит в потенциальной яме $[s_2(h), s_1(h)]$, причем s_i — точки остановки: $V'(s_i) \neq 0$. Тогда $s(t)$ —

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ,

т. е. $s(t + \tau) = s(t)$, где

$$\tau(h) = 2 \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \frac{ds}{\sqrt{2/m(h - V(s))}}. \quad (6.7)$$

Это движение попеременно достигает s_1 и s_2 .

Доказательство. Будем считать $\dot{s}_0 > 0$. Тогда в некотором интервале времени $\frac{ds}{dt} > 0$, так что в (6) берем знак +. Неудобство в том, что при $s \rightarrow s_1$ подкоренное выражение стремится к бесконечности.

Лемма Адамара. Если $\chi(x)$ — гладкая функция, $\chi(0) = 0$, то $\chi(x) = x\psi(x)$, причем $\psi(0) = \chi'(0)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_0^1 \chi'(x \cdot t) dt \Rightarrow \chi(x) = \chi(x) - \chi(0) = \\ &= \int_0^x \chi'(\xi) d\xi = \int_0^1 \chi'(xt) d(xt) = x\psi(x),\end{aligned}$$

что и требовалось. В силу леммы

$$\frac{2}{m}(h - V(s)) = (s - s_1)\psi(s), \quad \psi(s_1) = -\frac{2}{m}V'(s_1) \neq 0.$$

Следовательно,

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{V|s - s_1||\psi(s)|},$$

причем ψ — ограниченная функция. Этот интеграл сходится, т. е. $t \rightarrow t_1$ при $s \rightarrow s_1$, и наоборот. Отсюда следует, что $s(t)$ придет в сколь угодно малую окрестность s_1 , в то время как движение в некоторой конечной окрестности нами уже изучено: точка дойдет до s_1 и повернет назад (рис. 43). Потом она дойдет до s_2 и снова повернет назад. Через время

$$\tau = \int_{s_0}^{s_1} - \int_{s_1}^{s_2} + \int_{s_2}^{s_0} = 2 \int_{s_1}^{s_2}$$

точка снова будет в s_0 со скоростью $\dot{s}(\tau) > 0$. Из интеграла энергии $\dot{s}(\tau) = \dot{s}(0)$. В итоге у движений $s(t - \tau)$, $s(t)$ начальные условия совпадают, т. е. и сами они совпадают по теореме единственности решения. Доказательство завершено.

Обратим внимание на точку минимума $\bar{s}$, заведомо имеющуюся внутри потенциальной ямы. При $h \rightarrow V(\bar{s})$ границы $s_i(h)$ стягиваются, и формула для $\tau(h)$ не позволяет понять поведение τ .

Поэтому взамен (7) будет выведена

ФОРМУЛА ЛИНДШТЕДТА.

Допустим, что $\bar{s} = 0$ — точка невырожденного минимума:

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V''(0) = k > 0.$$

Пусть l — какой-либо параметр размерности длины. Положим

$$V'''(0) = \frac{k}{l} \gamma, \quad V'''(0) = \frac{k}{l^2} \delta,$$

где γ, δ — безразмерные величины. Тогда при достаточно малых h период колебаний

$$\tau(h) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24} \frac{h}{kl^2} + O\left(\left(\frac{h}{kl^2}\right)^2\right) \right)$$

(величина $\eta = h/kl^2$ называется безразмерной энергией; мы придали формуле именно такой вид, ибо на практике говорить о «малости» имеет смысл только для безразмерных величин; к этому мы еще вернемся).

Доказательство. Величины m, l, k размерно независимы, так что их можно принять равными единице.

Лемма Морса. Существует замена переменной $s = f(q)$ такая, что $V(f(q)) = q^2/2$.

Действительно, применим дважды лемму Адамара:

$$V(s) = s\psi(s), \quad \psi(0) = V'(0) = 0 \Rightarrow \psi(s) = \frac{s}{2} \varphi(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{s^2}{2} \varphi(s), \quad \varphi'(0) = V''(0) = 1.$$

Осталось положить $q(s) = s\sqrt{\varphi(s)}$.

Неравенство $V(s) \leq h$ приобретает вид $|q| \leq \sqrt{2h} = a$. Период

$$\tau(h) = 2 \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \frac{ds}{\sqrt{2(h - V(s))}} = 2 \int_a^0 \frac{f'(q) dq}{\sqrt{2h - q^2}}.$$

Положим $q = \sqrt{2h} \sin \xi$. Тогда

$$\tau(h) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f'(\sqrt{2h} \sin \xi) d\xi.$$

Разложим f в ряд Тейлора:

$$f = q + \frac{B}{2} q^2 + \frac{C}{6} q^3 + \frac{D}{24} q^4 + O(q^5),$$

$$f' = 1 + Bq + \frac{C}{2} q^2 + \frac{D}{6} q^3 + O(q^4).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tau(h) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} & (1 + B\sqrt{2h} \sin \xi + C h \sin^2 \xi + \frac{D}{6} \sqrt{2h^3} \sin^3 \xi + \\ & + O(h^2 \sin^2 \xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Интегралы от нечетных функций $\sin \xi$ и $\sin^3 \xi$ равны нулю, и

$$\begin{aligned} \tau(h) &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + Ch \sin^2 \xi) d\xi + O(h^2) = \\ &= 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} Ch + O(h^2) \right). \end{aligned}$$

Осталось вычислить C . Для этого подставим разложение для $s = f(q)$ в разложение

$$V(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\gamma s^3}{6} + \frac{\delta s^4}{24} + O(s^5).$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2} &= \frac{q^2}{2} + \left[\frac{B}{2} + \frac{\gamma}{6} \right] q^3 + \left[\frac{\delta}{24} + \frac{B^2}{8} + \frac{i^2 C}{2 \cdot 6} + \frac{3\gamma B}{2 \cdot 6} \right] q^4 + O(q^5), \\ B &= -\frac{\gamma}{3}, \quad C = \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{12}. \end{aligned}$$

Доказательство на этом закончено.

Условимся считать безразмерную величину ϵ малой, если величинами вида $k\epsilon^2$ можно пренебречь при заданной точности вычислений. Например, если задана точность 10^{-2n} и известно, что k не превосходит несколько десятков, то ϵ будет малой, если $|\epsilon| < 10^{-(n+1)}$.

Из разложения $f(q)$ видно, что величины q и s малы одновременно. Если мала безразмерная амплитуда колебаний $q/l = \sqrt{2h/kl^2}$, то безразмерной энергией η уже можно пренебречь, и период получается равным

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

если же мала энергия колебаний, то

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24} \frac{h}{kl^2} \right).$$

Нам осталось рассмотреть

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ,

которые происходят в случае, когда одна из границ нетривиальной ($s_1 \neq s_2$) потенциальной ямы является не точкой остановки, а положением равновесия: $V'(s_1) = 0$. Пусть $\dot{s}_0 > 0$. По лемме Адамара, примененной дважды, имеем

$$\frac{2}{m} (h - V(s)) = (s - s_1)^2 \varphi(s),$$

причем $\varphi(s_1) \neq 0$, если критическая точка невырождена, т. е. $V''(s_1) \neq 0$. Впрочем, это не обязательно. Видим, что

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{|s - s_1| \sqrt{|\varphi(s)|}},$$

т. е. интеграл расходится. Это значит, что $s(t) \rightarrow s_1$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку время допускает инверсию, существует движение $s^-(t) = s(-t)$ такое, что $s^-(t) \rightarrow s_1$ при $t \rightarrow -\infty$. Такое движение выходит из сколь угодно малой окрестности точки s_1 , что указывает на неустойчивость имеющегося равновесия. Напротив, в окрестности точки минимума движение носит колебательный характер, т. е. устойчиво. Эти соображения легко довести до строгих доказательств.

Движения в $\mathbb{M}^h$ типа $(-\infty, s_3)$ просто уходят в бесконечность.

Тема 7

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Мы приступаем к изучению динамики систем материальных точек.

СВОБОДНАЯ СИСТЕМА

считается заданной, когда в некоторой системе отсчета (x, y, z, t) имеется N точек с массами m_i и радиусами-векторами $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$, а движением системы называется всякий набор функций $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$, удовлетворяющий заданным дифференциальным уравнениям вида

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

Функция $\mathbf{F}_i = X_i \mathbf{e}_x + Y_i \mathbf{e}_y + Z_i \mathbf{e}_z$ называется силой, действующей на точку m_i . Условия существования, единственности и достаточной гладкости решений системы уравнений (1) считаются выполненными. На практике выражения $\mathbf{F}_i$ подбираются так, чтобы не слишком громоздко и вместе с тем возможно более точно учесть взаимодействия между точками и воздействия на них других объектов. За этой краткой формулировкой кроется следующее:

1) мы умеем достаточно точно отделять мысленно один движущийся объект от другого и распознавать различные типы взаимодействия между движущимися объектами; существуют объекты, размерами которых с достаточной точностью можно пренебречь (материальные точки);

2) существуют так называемые инерциальные системы отсчета, в которых с достаточной точностью можно считать, что материальная точка, не подвергаясь никаким воздействиям, движется с нулевым ускорением (первый закон Ньютона);

3) материальные точки имеют измеряемую характеристику, называемую массой; суммарное воздействие на точку характеризуется силой $\mathbf{F}$ так, что $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ (второй и главный закон Ньютона);

4) движущаяся материальная точка может не только испытывать воздействие, но и сама воздействовать на другие тела и материальные точки; мы говорим, что имеется система материальных точек, если с достаточной точностью можно выделить взаимодействия между точками и заодно считать, что известно изменение состояния других воздействующих на них объектов с течением времени (т. е. эти объекты воздействию со стороны точек не подвергаются);

5) воздействия распространяются мгновенно: силы определяются тем, где находятся точки и какую имеют скорость именно в текущий момент времени.

В силу вышесказанного закон Ньютона для i -й точки получает вид (1).

Как уже отмечалось в теме 5, учет взаимодействий возможен не только в форме явного задания силы, но и в форме задания связей. Для нас это будут соотношения вида

$$f_{\alpha}(r_1, \dots, r_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (7.2)$$

(эти соотношения не включают скоростей точек системы и называются голономными связями; мы будем рассматривать только такие). Всегда предполагается, что связи функционально независимы, т. е. ранг матрицы Якоби

$$\text{rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)} = m \Big|_{f_{\alpha}=0}. \quad (7.3)$$

Говорят, что задана идеализированная механическая

СИСТЕМА СО СВЯЗЯМИ,

если имеется N точек с массами m_i и радиусами-векторами r_i , заданы силы $F_i(r_1, \dots, r_N, r_1, \dots, r_N, t)$ и связи (2), удовлетворяющие (3); при этом набор функций $r_1(t), \dots, r_N(t)$ называется движением системы, если он удовлетворяет связям и для него существуют такие функции $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$, что

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha}. \quad (7.4)$$

Вектор-функция

$$R_{\alpha i} = \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_i} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

называется реакцией на точку m_i связи $f_{\alpha}=0$, а

$$R_i = \sum_{\alpha} R_{\alpha i}$$

называется суммарной реакцией связей, действующей на m_i . Таким образом, уравнения (7.4) имеют смысл законов Ньютона:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i.$$

Можно сказать, что силы $\mathbf{R}_i$ нам известны не до конца. Хотя в принципе существует способ явно вычислить их как функции $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t$, основная идея развиваемого подхода состоит как раз в том, чтобы подольше обойтись без таких вычислений, и мы не раз убедимся в этом ниже.

Теперь следует объяснить, почему употребляется слово «идеализированная» или, что то же самое, почему выражение для $\mathbf{R}_i$ дано именно на основе (7.5), а не как-нибудь еще.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРИНЯТЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

поясним на примерах.

1. Точка m_k обязана находиться на некоторой поверхности: связь —

$$f_\alpha(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

а соответствующая сила реакции

$$\mathbf{R}_{\alpha k} = \lambda_\alpha \text{grad}_k f_\alpha \quad (7.6)$$

ортогональна поверхности, так что при взаимодействии с ней точки m_k не возникает никакого трения.

2. Расстояние l_{ij} между двумя точками m_i, m_j постоянно (как в твердом теле): тогда связь имеет вид

$$f_\alpha = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0,$$

откуда

$$\mathbf{R}_{\alpha i} = 2\lambda_\alpha \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\alpha j} = 2\lambda_\alpha \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{pmatrix}.$$

Получается, что

$$\mathbf{R}_{\alpha i} = -\mathbf{R}_{\alpha j} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (7.7)$$

Априори это не очевидно. Если мы представим себе, что связь реализована в виде нити, связывающей точки, то легко сможем согласиться, что вдоль нее на точки действуют противоположные силы натяжения. Нашей физической интуиции это не противоречит. Но если мы имеем настоящее, да еще неоднородное твердое тело, в котором точки удерживаются на постоянных расстояниях (причем приблизительно) отнюдь не нитями, то уверенность в свойстве (7) уменьшится. На деле согласие с (6) и (7) оправдывается не умозрительными размышлениями, а тем, что практическое применение концепции идеализированной системы хорошо показывает себя. Но и это применение имеет свои границы, о которых мы расскажем в разделе «динамика твердого тела».

Понятие идеализированной системы со связями есть обобщение понятия свободной системы. Уравнения Ньютона (1) и (4)

объединим единообразной записью

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathcal{F}_i, \quad (7.8)$$

подразумевая, что силы $\mathcal{F}_i$ не обязательно полностью заданы явно. Теперь допустим, что силы представлены в виде

$$\mathcal{F}_i = \Phi_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (7.9)$$

где

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \quad (7.10)$$

(третий закон Ньютона). Тогда по определению

Φ_i — внешняя сила,

действующая на i -ю точку системы,

$\mathbf{f}_{ij}$ — внутренняя сила,

с которой на i -ю точку действует масса m_i . Ясно, что никакой единственности разложения вида (9) доказать нельзя. Поэтому при выписывании этого разложения существенны физические соображения.

Опыт показывает, что разложение (9) возможно и удобно. Например, реакции связей типа постоянного расстояния (пример 2) относятся к внутренним силам. То же касается и сил гравитационного взаимодействия.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА.

При движении системы ее импульс $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ изменяется так, что его производная по времени

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \Phi_i, \quad (7.11)$$

т. е. равна векторной сумме всех внешних сил.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i &= \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum \mathbf{F}_i = \sum_i \left(\Phi_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} \right) = \\ &= \sum_i \Phi_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{f}_{ij} = \sum_i \Phi_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) = \sum_i \Phi_i. \end{aligned}$$

Каждая система материальных точек имеет свой центр масс — точку S , радиус-вектор которой

$$\overline{OS} = \mathbf{s} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

Это определение корректно (не зависит от выбора O):

$$\frac{\sum m_i (1 + \mathbf{r}_i)}{\sum m_i} \mathbf{l} = + \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}.$$

Следствие теоремы. Пусть $M = \sum m_i$ — полная масса системы. Тогда

$$M\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{\Phi} = \sum \mathbf{\Phi}_i. \quad (7.12)$$

Если $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$, то имеем уравнение Ньютона для одной точки. Таким образом, при определенных условиях центр масс можно рассматривать как материальную точку, мысленно сосредоточив в ней всю массу системы и приложив к ней формальную сумму всех внешних сил (мы не называем эту сумму силой, так как этот вектор не является характеристикой какого-либо «суммарного воздействия»; здесь нет сложения сил по принципу суперпозиции, ибо $\mathbf{\Phi}_i$ являются характеристиками воздействий на разные точки). Даже если в рамках принятой модели движения размерами системы пренебречь нельзя, центр масс все равно является геометрической точкой. Таким образом, модель материальной точки получает здесь как бы самое точное свое воплощение.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Пусть наряду с инерциальной системой отсчета $Oxyz$ есть система координат $A\xi\eta\zeta$, движущаяся поступательно (оси ее не вращаются). В этом случае $d/dt = \delta/\delta t$. Обозначим $\overline{OA} = \mathbf{l}$, $\mathbf{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{l}$.

Кинетическим моментом системы относительно системы координат $A\xi\eta\zeta$ называется вектор

$$\mathbf{\Lambda}_A = \sum_i m_i [\mathbf{\rho}_i \times \dot{\mathbf{\rho}}_i].$$

Моментом сил относительно этой системы — вектор

$$\mathbf{G}_A = \sum_i [\mathbf{\rho}_i \times \mathcal{F}_i].$$

Производная кинетического момента $\mathbf{\Lambda}_A$ при движении равна моменту сил $\mathbf{G}_A$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}_A}{dt} = \mathbf{G}_A \quad (7.13)$$

в следующих случаях:

- 1) $\dot{\mathbf{l}} = 0$, т. е. система $A\xi\eta\zeta$ — тоже инерциальная (как и $Oxyz$);
- 2) $\mathbf{AS} \equiv 0$, т. е. начало координат постоянно находится в центре масс (так называемые оси Кенига; соответствующий момент $\mathbf{\Lambda}_S$ именуется собственным кинетическим моментом системы);
- 3) $\dot{\mathbf{l}} \neq 0$, $\overline{AS} \neq 0$, но $\dot{\mathbf{l}} \parallel \overline{AS}$.

Доказательство. В системе координат $A\xi\eta\zeta$ к силе $\mathcal{F}_i$ прибавляется еще сила инерции $\mathbf{\Phi}_i^{\text{нер}} = -m_i\ddot{\mathbf{l}}$:

$$m_i\ddot{\mathbf{\rho}}_i = \mathcal{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{l}},$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Lambda}_A = \sum m_i [\mathbf{\rho}_i \times \dot{\mathbf{\rho}}_i] + \sum [\mathbf{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{\rho}}_i] =$$

$$= \sum [\rho_i \times \mathcal{F}_i] - \sum m_i [\rho_i \times \ddot{\mathbf{i}}] = \mathbf{G}_A - M [\overline{AS} \times \ddot{\mathbf{i}}].$$

Должно быть

$$[\overline{AS} \times \ddot{\mathbf{i}}] \equiv 0,$$

что и реализуется в перечисленных трех случаях.

Последний случай не столь важен, как первые два, но и он иногда реализуется, например, когда точки с массами m_1, m_2 притягивают друг друга: $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \| (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Тогда и силы направлены по прямой, соединяющей точки, и центр масс S на ней лежит. Поэтому в качестве A можно взять любую из точек.

Мы очень кстати вспомнили о силах, направленных от одной точки к другой. Воспользуемся (9) и заметим, что

$$\sum_i [\rho_i \times \mathcal{F}_i] = \sum_i [\rho_i \times \Phi_i] + \sum_{i < j} [\rho_i - \rho_j] \times \mathbf{f}_{ij}.$$

Следовательно, если внутренние силы удовлетворяют условию

$$\mathbf{f}_{ij} \| (\rho_i - \rho_j), \quad (7.14)$$

как это обычно сразу принимается при формулировании третьего закона Ньютона, то получится, что при вычислении момента сил можно брать только внешние силы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В тех же подвижных осях, что и в теореме об изменении кинетического момента, введем относительную кинетическую энергию:

$$T_A = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

и продифференцируем ее:

$$\begin{aligned} \frac{dT_A}{dt} &= \sum_i \bar{m}_i (\dot{\rho}_i, \ddot{\rho}_i) = \sum (\dot{\rho}_i, \mathcal{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{i}}) = \\ &= \sum (\mathcal{F}_i, \dot{\rho}_i) - M (\overline{AS}, \ddot{\mathbf{i}}). \end{aligned}$$

Вывод: полная производная кинетической энергии

$$\frac{dT_A}{dt} = \sum_i (\mathcal{F}_i, \dot{\rho}_i), \quad (7.15)$$

если, как и в предыдущей теореме,

1) $\ddot{\mathbf{i}} \equiv 0$ (инерциальная система отсчета) или

2) $A \equiv S$ (оси Кенига; величина T_S называется собственной кинетической энергией системы).

Другие возможности нам не потребуются.

Выясним, когда вместо $\mathcal{F}_i$ в (15) можно подставить только внешние силы. Имеем

$$\sum_i (\mathcal{F}_i, \dot{\rho}_i) = \sum_i (\Phi_i, \dot{\rho}_i) + \sum_{i < j} (\mathbf{f}_{ij}, \dot{\rho}_i - \dot{\rho}_j).$$

Если, согласно (14),

$$\mathbf{f}_{ij} = \varphi_{ij} \cdot (\rho_i - \rho_j),$$

то последняя сумма равна

$$\sum_{i < j} \varphi_{ij} \frac{d}{dt} \frac{(\rho_i - \rho_j)^2}{2}.$$

Она должна обратиться в нуль. В частности, это происходит в случае, когда попарные расстояния между точками не меняются, т. е. мы имеем твердое тело.

Тема 8

ГАЛИЛЕЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Объясним, почему именно импульс, кинетический момент и кинетическая энергия заслуживают права фигурировать в общих теоремах динамики. Для этого потребуются

ПОНЯТИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

функции относительно преобразования. Начнем с примера.

Пусть на плоскости Oxy задана функция $\varphi(x, y)$. Допустим, что мы ввели новую декартову систему координат $A\xi\eta$. Надо уяснить, что может значить выражение «функция $\varphi(x, y)$ инвариантна при замене переменных $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ ». Для определенности положим $\varphi_1(x, y) = k/2(x^2 + y^2)$, $\varphi_2 = mgy$.

Случай первый: поворот осей

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

Подставим эти формулы в выражения φ_i . Получим

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} [(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2 + (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)^2] = \frac{k}{2} (\xi^2 + \eta^2),$$

$$\varphi_2 = mg(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi).$$

Ясно, что первую функцию разумно назвать инвариантной при повороте системы координат, а вторую — нет.

Случай второй: сдвиг осей

$$x = \xi + a, \quad y = \eta.$$

Подставим в выражения φ_i и получим

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} (\xi + a)^2 + \eta^2, \quad \varphi_2 = mg\eta.$$

Здесь явно следует сделать противоположные выводы.

Определение. Пусть имеется функция $\varphi = \bar{\varphi}(q_1, \dots, q_n)$ и замена переменных $q_i = q_i^*(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда функция φ в новых переменных приобретает вид

$$\varphi = \varphi^*(\xi_1, \dots, \xi_n) = \bar{\varphi}(q_1^*(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, q_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Функция φ называется инвариантной при данной замене, если

$$\varphi^*(\xi_1, \dots, \xi_n) = \bar{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (8.1)$$

т. е. вместо того, чтобы подставлять формулы преобразования, достаточно в выражении $\bar{\varphi}$ вместо каждой буквы q_1 поставить букву ξ_1 , вместо q_2 поставить ξ_2 и так далее.

Один из выводов четвертой темы гласит, что общий вид уравнения Ньютона сохраняется при преобразовании Галилея:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u\tau \\ b + v\tau \\ c + w\tau \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad t = t_0 + \tau.$$

Этот вывод дословно переносится в динамику системы. Примеры, с которых мы начали, показывают, что конкретный аналитический вид правых частей уравнения Ньютона в разных инерциальных системах отсчета может быть неодинаковым. Так вот, сейчас мы хотим рассмотреть системы, в которых аналитический вид правых частей, наоборот, остается инвариантным при всех преобразованиях Галилея. Для простоты мы рассмотрим случай, когда силы потенциальны, т. е. существует функция $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ такая, что

$$\mathbf{F}_i = -\text{grad}_i V, \quad i = 1, \dots, N,$$

или, более подробно, в проекциях на оси координат

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad (8.2)$$

и потребуем, чтобы потенциал V был инвариантен при всех преобразованиях Галилея. Выясним, что вытекает из этого свойства, беря по очереди частные преобразования.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СМЕЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Допустим, что сделано преобразование

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \tau + t_0.$$

Тогда можно написать равенство типа (1):

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_0 + \tau) = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \tau).$$

Дифференцируя по t_0 и подставляя $t_0 = 0$, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} \equiv 0. \quad (8.3)$$

Это — частная производная по времени. Ее не следует путать с

полной производной при движении:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_i (\text{grad}_i V, \dot{\mathbf{r}}_i),$$

которую мы перепишем с учетом (3) и уравнений Ньютона

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\text{grad}_i V. \quad (8.4)$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= - \sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = - \sum_i m_i \frac{d}{dt} \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)}{2} = \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = - \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

Итак, вдоль решений системы уравнений Ньютона (4)

$$\frac{d}{dt} (T + V) \equiv 0,$$

$$H = T + V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \text{const.}$$

Мы пришли к тому, что полная энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ

Положим, например,

$$x = \xi + s, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \tau.$$

Тогда имеем по определению инвариантности

$$\begin{aligned} V(\xi_1 + s, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_N + s, \eta_N, \zeta_N) = \\ = V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_N, \eta_N, \zeta_N). \end{aligned}$$

Дифференцируя по s и подставляя $s=0$, получаем

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \equiv 0,$$

или в силу уравнений Ньютона

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{x}_i \equiv 0,$$

т. е. функция $P_x = \sum m_i \dot{x}_i$ есть первый интеграл движения. Поступая аналогично с координатами y, z , получим

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$$

Импульс системы сохраняется.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТОВ

Для начала дадим инвариантности эквивалентную, но несколько иную трактовку. Если выражение потенциала сохраняется при повороте системы координат, то равносильным образом (посмотрим как бы с точки зрения поворачивающихся осей) выражение сохраняется, если систему точек повернуть как твердое тело вокруг начала координат. Вспомним формулу конечного поворота на угол χ вокруг вектора $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \sin \chi [\mathbf{i} \times \mathbf{r}] + (1 - \cos \chi) [\mathbf{i} \times [\mathbf{i} \times \mathbf{r}]].$$

Мы хотим, чтобы $V(\mathbf{r}_1', \dots, \mathbf{r}_N') = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Поскольку ясно, что нам предстоит дифференцировать по χ при $\chi=0$, формулу конечного поворота достаточно записать в виде

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \chi [\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i] + O(\chi^2).$$

Теперь действуем по уже привычной схеме:

$$V(\mathbf{r}_1 + \chi [\mathbf{i} \times \mathbf{r}_1] + O(\chi^2), \dots) = V(\mathbf{r}_1, \dots),$$

$$\sum_k (\text{grad}_k V, [\mathbf{i} \times \mathbf{r}_k]) = \sum_k ([\mathbf{r}_k \times \text{grad}_k V], \mathbf{i}) \equiv 0.$$

Поскольку вектор $\mathbf{i}$ может иметь произвольное направление,

$$\sum_k [\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k] = \frac{d}{dt} \sum_k m_k [\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k] \equiv 0,$$

$$\Lambda_0 = \sum_k m_k [\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k] = \text{const.}$$

Кинетический момент сохраняется.

Итог: импульс, кинетический момент и полная энергия суть величины, сохраняющиеся при движении произвольной свободной системы с галилеево инвариантным потенциалом.

При $N=1$ таких систем всего одна: $V = \text{const.}$ При $N=2$

$$V = \tilde{V}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

В самом деле,

$$\text{grad}_1 V = -\text{grad}_2 V \Rightarrow V = V'(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$[\mathbf{r}_1 \times \text{grad}_1 V] + [\mathbf{r}_2 \times \text{grad}_2 V] \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{r} \times \frac{\partial V'}{\partial \mathbf{r}} \equiv 0 \Rightarrow \text{grad } V'(\mathbf{r}) \parallel \text{grad } \frac{r^2}{2}.$$

Перейдем к рассмотрению систем со связями. Нас интересует

ГАЛИЛЕЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ СВЯЗЕЙ.

Теорема 1 (об изменении кинетической энергии).

Если связи сохраняются при сдвиге времени, т. е.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

то производная от кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.

В частности, если силы консервативны, это значит, что $F_i = -\text{grad}_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, то имеет место первый интеграл (интеграл энергии): $H = T + V = h = \text{const}$.

Доказательство. Имеем, согласно общей теореме из динамики свободной системы,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) + \sum_{i, \alpha} \lambda_\alpha (\text{grad}_i f_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_i).$$

Но

$$\sum_i (\text{grad}_i f_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} f_\alpha(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \equiv 0,$$

что и требовалось. Если $F_i = -\text{grad}_i V$, то $\sum (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = -dV/dt$.

Теорема 2 (об изменении импульса).

Если связи сохраняются при сдвигах вдоль оси x , т. е.

$$\sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

то производная от импульса вдоль этой оси:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i X_i$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.

В частности, если $\sum X_i \equiv 0$, то имеет место интеграл импульса $P_x = \text{const}$.

Доказательство:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i \left(X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) = \sum_i X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}.$$

Теорема 3 (об изменении момента).

Если связи сохраняются при поворотах вокруг оси Oz , то производная от кинетического момента относительно этой оси:

$$\frac{d}{dt} \Lambda_{Oz} = G_{Oz},$$

или подробнее

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i (x_i y_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i)$$

имеет такой же вид, как если бы связей не было.

В частности, если $G_{Oz} \equiv 0$, то имеет место интеграл момента относительно этой оси.

Доказательство. Инвариантность связей означает

$$f_\alpha(x_1 \cos \chi - y_1 \sin \chi, x_1 \sin \chi + y_1 \cos \chi, z_1, \dots) = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots).$$

Дифференцируем по χ :

$$\sum_i \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} (-x_i \sin \chi - y_i \cos \chi) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} (x_i \cos \chi - y_i \sin \chi) \right]$$

и подставляем $\chi=0$:

$$\sum_i \left(x_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \equiv 0.$$

Далее ясно.

Примером системы, у которой связи инвариантны относительно всей группы Галилея, является

СВОБОДНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО —

система точек, на которую наложены все возможные связи типа равенства попарных расстояний и не наложено никаких других (из сказанного формально вытекает, что следует наложить $N(N-1)/2$ связей; на самом деле, очевидно, достаточно иметь всего

$$3 + 3(N-3) = 3N-6 —$$

сохраняются попарные расстояния между тремя отмеченными точками и расстояния от каждой из оставшихся до трех отмеченных).

Тема 9

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Здесь мы рассматриваем систему материальных точек, попарные расстояния между которыми с течением времени заведомо не будут меняться. За счет чего? В силу вышесказанного мы либо можем считать, что дана идеализированная система со связями $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = l_{ij}^2 = \text{const}$, природа которых нас не интересует, либо скажем, что точки удерживаются какими-то внутренними силами $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, причем $\mathbf{f}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Эти трактовки равносильны и позволяют применить к твердому телу все общие теоремы динамики, выписывая в правых частях соответствующих уравнений только силы $\mathcal{F}_i$, внешние по отношению к этой системе:

а) заданные силы;

б) реакции дополнительных связей, если таковые имеются. Специфика рассматриваемой модели — и ее непременно надо учесть при применении теорем — состоит в том, что распределение скоростей $\mathbf{v}_i$ в системе «твердое тело» определяется скоростью одной произвольно отмеченной точки и вектором угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$. Начнем с того, что изучим

ВРАЩЕНИЕ.

Пусть в системе координат $Q\xi\eta\zeta$ тело вращается вокруг точки Q (точка Q принадлежит телу и неподвижна). Тогда

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i], \quad \mathbf{r}_i = \overline{Qm_i}.$$

Вычислим кинетический момент и кинетическую энергию в этой системе:

$$\Lambda_Q = \sum m_i [\rho_i \times \dot{\rho}_i], \quad T_Q = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\rho}_i^2.$$

Индекс суммирования i впредь условимся не писать. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_Q &= \sum m [\rho \times \dot{\rho}] = \sum m [\rho \times [\omega \times \rho]], \\ T_Q &= \frac{1}{2} \sum m \dot{\rho}^2 = \frac{1}{2} \sum m ([\omega \times \rho], [\omega \times \rho]) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\omega, [\rho \times [\omega \times \rho]]) = \frac{1}{2} (\omega, \Lambda_Q). \end{aligned}$$

Легко видеть, что в произвольно взятом положении тела его кинетический момент линейно зависит от ω , а кинетическая энергия — квадратично. Более того,

$$\Lambda_Q = \text{grad}_{\omega} T_Q. \quad (9.1)$$

В частности и более подробно:

$$\Lambda_{Q\xi} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_{\xi}}, \quad \Lambda_{Q\eta} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_{\eta}}, \quad \Lambda_{Q\xi} = \frac{\partial T_Q(\omega)}{\partial \omega_{\xi}}.$$

Действительно, подставим $\omega = \omega_{\xi} \mathbf{e}_{\xi} + \omega_{\eta} \mathbf{e}_{\eta} + \omega_{\zeta} \mathbf{e}_{\zeta}$ в выражение $T = \frac{1}{2} \sum m ([\omega \times \rho], [\omega \times \rho])$ и продифференцируем, например, по ω_{ξ} . В каждом слагаемом надо дифференцировать по очереди каждый из векторных сомножителей. Но они одинаковы, так что можно взять удвоенную производную по первому сомножителю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_Q}{\partial \omega_{\xi}} &= \sum m \left(\frac{\partial}{\partial \omega_{\xi}} [\omega \times \rho], [\omega \times \rho] \right) = \\ &= \sum m \left(\left[\frac{\partial \omega}{\partial \omega_{\xi}} \times \rho \right], [\omega \times \rho] \right) = \sum m ([\mathbf{e}_{\xi} \times \rho], [\omega \times \rho]) = \\ &= \sum m (\mathbf{e}_{\xi}, [\rho \times [\omega \times \rho]]) = (\mathbf{e}_{\xi}, \sum m [\rho \times [\omega \times \rho]]) = (\mathbf{e}_{\xi}, \Lambda_Q) = \Lambda_{Q\xi}. \end{aligned}$$

Теорема. В точке Q существует связанный с телом репер $\mathbf{e}, \mathbf{e}', \mathbf{e}''$ такой, что если $\omega = p\mathbf{e} + q\mathbf{e}' + r\mathbf{e}''$, то

$$\Lambda_Q = A p \mathbf{e}' + B q \mathbf{e}' + C r \mathbf{e}'', \quad (9.2)$$

$$T_Q = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2), \quad (9.3)$$

где A, B, C — некоторые положительные (тело считается невырожденным) величины, зависящие от точки Q .

Доказательство. Разложим все векторы, входящие в выражение энергии, по произвольным осям, жестко связанным с телом (называть эти оси никак не будем). Легко видеть, что значение $T_Q(\omega)$ зависит только от расположения вектора ω в этих

осях и не зависит от ориентации тела, так как координаты всех масс в этих осях постоянны:

$$T_Q = (\omega, \sum m [\underline{\rho} \times [\omega \times \underline{\rho}]])$$

(подчеркнуты неизменные слагаемые и множители). Следовательно, поверхность, заданная уравнением

$$2T_Q(\omega) = 1$$

(геометрическое место соответствующих концов векторов ω), тоже жестко связана с телом. Поскольку выражение для T_Q квадратично по компонентам вектора ω и положительно определено, поверхность эта — эллипсоид, так называемый **эллипсоид инерции**. У всякого эллипсоида есть три ортогональных направления e, e', e'' , называемых главными, таких, что в соответствующей (можно считать, правой) системе координат его уравнение имеет вид

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 1.$$

Следовательно,

$$T_Q = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

$$\Lambda_Q = \text{grad}_\omega T_Q = Ape + Bqe' + Cre''.$$

Теорема доказана. Чтобы уяснить смысл величин A, B, C , положим $q = xe + ye' + ze''$ (индекс i по-прежнему опущен):

$$\begin{aligned} A &= 2T_Q(e_\xi) = (e_\xi, \sum m [\rho \times [e_\xi \times \rho]]) = \\ &= (e_\xi, \sum m (\rho^2 e_\xi - (\rho, e_\xi) e_\xi)) = \sum m (\rho^2 - (\rho, e_\xi)^2) = \\ &= \sum m (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = \sum m (y^2 + z^2); \end{aligned}$$

и аналогично

$$B = \sum m (z^2 + x^2), \quad C = \sum m (x^2 + y^2).$$

Это — **главные моменты инерции**, т. е. моменты инерции относительно главных направлений в точке Q . Вообще моментом инерции относительно оси Qf , проходящей через точку Q в направлении единичного вектора f , называется число

$$I_Q(f) = \sum m \delta^2 = \sum m (\rho^2 - (\rho, f)^2), \quad (9.4)$$

где δ — расстояние от точки m до этой оси. Итак,

$$A = I_Q(e), \quad B = I_Q(e'), \quad C = I_Q(e'').$$

Если $\omega = \omega f, f = \alpha e + \beta e' + \gamma e''$, то, очевидно,

$$T_Q = \frac{\omega^2}{2} I_Q(f),$$

$$I_Q(f) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (9.5)$$

Эллипсоид инерции сжат в направлении главной оси, отвечающей наибольшему моменту инерции, и вытянут в направлении оси с наименьшим моментом (рис. 17). Если тело переходит само

в себя (с учетом распределения масс) при некотором повороте или отражении, сохраняющим точку Q , то и эллипсоид инерции также окажется инвариантным. Отсюда —

правило симметрии

для определения главных направлений в точке Q (рис. 18):

1) плоскость симметрии есть главная (если через точку проходит плоскость симметрии тела, то один главный вектор ей перпендикулярен, а два других лежат в ее плоскости);

2) ось симметрии есть главная (если через точку Q проходит ось симметрии тела, то один из главных векторов направлен по ней).

Обычно моменты инерции тел вычисляются не дискретным суммированием, а интегрированием непрерывного распределения масс по объему.

Теорема Эйлера. Пусть

$$\mathbf{G}_Q = G\mathbf{e} + G'\mathbf{e}' + G''\mathbf{e}'' \quad —$$

момент в системе $Q\xi\eta\zeta$ всех внешних сил, действующих на твердое тело, а сама точка Q является либо началом инерциальной системы отсчета, либо центром масс тела. Тогда в каждый момент времени

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= G, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= G', \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= G'' \end{aligned} \quad (9.6)$$

(уравнения Эйлера) и

$$\frac{dT_Q}{dt} = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{G}_Q); \quad (9.7)$$

величины G , G' , G'' могут зависеть, в частности, от ориентации тела и его угловой скорости.

Доказательство. Рассматривая репер $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ как подвижную систему координат, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_Q}{dt} &= \frac{\delta\Lambda_Q}{\delta t} + [\boldsymbol{\omega} \times \Lambda_Q] = \mathbf{G}_Q, \\ A\dot{p}\mathbf{e} + B\dot{q}\mathbf{e}' + C\dot{r}\mathbf{e}'' + \begin{vmatrix} \mathbf{e} & p & A p \\ \mathbf{e}' & q & B q \\ \mathbf{e}'' & r & C r \end{vmatrix} &= G\mathbf{e} + G'\mathbf{e}' + G''\mathbf{e}''. \end{aligned}$$

В проекции на $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ получаем уравнения Эйлера. Выражение для T_Q дифференцируется непосредственно.

ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА ПО ИНЕРЦИИ

по определению имеет место тогда, когда $\mathbf{G}_Q \equiv 0$. В этом случае вектор $\mathbf{\Lambda}_Q = \mathbf{\Lambda} = \text{const}$ постоянен в системе координат $Q\xi\eta\zeta$, и, кроме того, сохраняется кинетическая энергия T :

$$T = T_Q = \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{\Lambda}_Q) = h = \text{const},$$

откуда вытекает, что постоянна проекция вектора ω на направление $\mathbf{\Lambda}$. В подвижной системе координат, связанной с телом (в главных осях), вектор ω перемещается по кривой:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \Lambda^2, \quad (9.8)$$

где $2h$ и Λ^2 — постоянные, зависящие от начальных условий. Положим $\Lambda^2 = 2hD$ и будем считать, что $A \leq B \leq C$. Тогда

$$A \leq D \leq C.$$

Сказанное позволяет дать качественное описание движения.

Первое представление Пуансо:

тело движется так, что его эллипсоид инерции катится без проскальзывания по некоторой неподвижной плоскости, перпендикулярной постоянному вектору кинетического момента (рис. 68).

Доказательство. Вектор $\mathbf{\Lambda}$ неподвижен в пространстве, но относительно тела движется. Рассмотрим происходящее с точки зрения тела. Имеем

$$\mathbf{\Lambda} = \text{grad}_\omega T_Q, \quad T = h = \text{const}.$$

Это значит, что вектор $\mathbf{\Lambda}$ перпендикулярен плоскости, касательной к эллипсоиду $T = h$ в точке ω . Разделим все векторы на $\sqrt{2h}$. Получим плоскость π , касательную к эллипсоиду инерции в точке P такой, что

$$\overline{OP} = \frac{\omega}{\sqrt{2h}},$$

и по-прежнему ортогональную $\mathbf{\Lambda}$. Расстояние от плоскости π до Q равно

$$d = \left(\frac{\omega}{\sqrt{h}}, \frac{\mathbf{\Lambda}}{\Lambda} \right) = \frac{2T}{\sqrt{2h}\Lambda} = \frac{\sqrt{2h}}{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

т. е. постоянно. С точки зрения неподвижной системы координат увидим то же самое, а, кроме того, скорость точки P , в которой эллипсоид касается неподвижной теперь плоскости π , равна $[\omega \times \overline{OP}] = 0$, т. е. имеем качение без проскальзывания.

Второе представление Пуансо:

если с репером e, e', e'' (т. е. с телом) связать конус

$$\frac{A\xi^2}{A-D} + \frac{B\eta^2}{B-D} + \frac{C\zeta^2}{C-D} = 0, \quad (9.9)$$

то движение тела можно представить как качение этого конуса по плоскости Π , проходящей через точку Q перпендикулярно $\mathbf{\Lambda}$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\Omega = \mathbf{\Lambda}/D$.

Доказательство. Введем (см. рис. 69) описанную только что плоскость Π и заметим, что относительно нее тело имеет угловую скорость $\tilde{\omega} = \omega - \Omega$ с компонентами

$$\tilde{p} = p - \frac{Ap}{D}, \quad \tilde{q} = q - \frac{Bq}{D}, \quad \tilde{r} = r - \frac{Cr}{D}.$$

Обратно,

$$p = \frac{D}{D-A} \tilde{p}, \quad q = \frac{D}{D-B} \tilde{q}, \quad r = \frac{D}{D-C} \tilde{r}.$$

Подставляя в интегралы (8), получаем

$$\frac{A\tilde{p}^2}{(D-A)^2} + \frac{B\tilde{q}^2}{(D-B)^2} + \frac{C\tilde{r}^2}{(D-C)^2} = \frac{2h}{D^2},$$

$$\frac{A^2\tilde{p}^2}{(D-A)^2} + \frac{B^2\tilde{q}^2}{(D-B)^2} + \frac{C^2\tilde{r}^2}{(D-C)^2} = \frac{2h}{D}.$$

Умножив первое уравнение на D и вычтя второе, увидим, что вектор $\overrightarrow{QP} = \tilde{\omega}$ лежит на конусе (9). Нормаль к нему в точке P ортогональна Π , так как имеет компоненты:

$$\frac{A}{D-A} \tilde{p} = \frac{A}{D-A} \frac{D-A}{D} p = \frac{Ap}{D}, \dots$$

Следовательно, конус касается плоскости. Скорость точки $\tilde{P}$ относительно плоскости Π равна $[\tilde{\omega} \times \overrightarrow{QP}] = 0$.

Рассмотрение движения по инерции на этом закончим.

Относительно движения с ненулевым моментом что-либо общее можно сказать, только если рассмотреть

БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ,

т. е. предположить, что $T \gg 1$ и

$$\left| \frac{d\Lambda_Q}{dt} \right| = |\mathbf{G}_Q| \ll |\omega| |\Lambda| = O(T) \quad (9.10)$$

(величина $|\mathbf{G}|/T$ безразмерна и потому может служить характеристикой малости воздействия внешних сил). В этом случае движение можно представить себе по Пуансо (любым из двух способов), одновременно считая, что вектор Λ и величина T медленно изменяются.

Сказанное не претендует ни на что, кроме очень общей идеи. В принципе такое представление справедливо лишь на конечном интервале времени, а пользоваться им на больших интервалах можно только при некоторых условиях и с должным обоснованием. Примером является

гироскопический эффект.

Предположим, что тело имеет ось симметрии, проходящую через точку Q в направлении $\mathbf{e}$; обозначим ее $Q\mathbf{e}$. Эта ось — обязатель-

но главная, и при этом $B=C$. Подействуем на тело силой F , приложенной в точке на оси симметрии на расстоянии l от точки Q . Теорема об изменении момента дает

$$\dot{\Lambda} = [le \times F] \perp e.$$

В частности, из первого уравнения Эйлера (6) вытекает, что

$$Ap = k = \text{const.}$$

Примем, что до приложения силы F тело вращалось вокруг оси симметрии: $\Lambda = A\omega_0 e = \text{const.}$ Считая $\omega_0 \gg 1$, после приложения силы будем иметь $\Lambda \approx A\omega_0 e$, а

$$A\omega_0 \frac{de}{dt} \approx \frac{d\Lambda}{dt} = l[e \times F],$$

т. е. ось симметрии будет стремиться повернуться не в направлении силы, а перпендикулярно ей. В этом соль эффекта.

Покажем строго, что при некоторых условиях наблюдается как бы постоянный гироскопический эффект. Для простоты и определенности примем, что действует сила тяжести

$$F = -mge_\zeta, \quad e_\zeta = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e''.$$

Имеют место интегралы движения:

$$Ap = k, \quad \Lambda_{0\zeta} = Ap\gamma + B(q\gamma' + r\gamma'') = c,$$

$$H = (Ap^2 + B(q^2 + r^2))/2 + mgl\gamma = h.$$

В силу неравенства $(q\gamma' + r\gamma'')^2 \leq q^2 + r^2$ приходим к

$$\frac{k^2}{2A} + \frac{B}{2} \left(\frac{c - k\gamma}{A} \right)^2 + mgl\gamma \leq h.$$

Подставим сюда начальные условия:

$$k = A\omega_0, \quad C = A\omega_0\gamma_0, \quad h = A\omega_0^2/2 + mgl\gamma_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma - \gamma_0)^2 + \frac{2mgl}{B\omega_0} (\gamma - \gamma_0) \leq 0.$$

Предположение (10) приобретает вид $\varepsilon = mgl/B\omega_0^2 \ll 1$. Итак, величина γ (косинус угла θ между векторами e и e_ζ) колеблется в малых пределах: $\gamma_0 - 2\varepsilon \leq \gamma \leq \gamma_0$, т. е. ось симметрии движется примерно по вертикальному круговому конусу (с угловой скоростью $\Omega = mgl/A\omega_0$ в силу $\Lambda = G_Q$). Такое движение называется псевдорегулярной прецессией. В отличие от движения по инерции теперь вектор $\Lambda \approx A\omega_0 e$ эволюционирует вместе с осью, а величина T незначительно изменяется (не более чем на $2mgl\varepsilon$). Это и требовалось получить.

Следует обратить особое внимание на то, что точка Q может оказаться центром масс твердого тела (если применены оси Кеннига). Заключение, сделанные нами при рассмотрении вращения, могут иметь силу и тогда, когда рассматривается

ОБЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Положение тела определяется местонахождением его центра масс S и ориентацией главных центральных (т. е. построенных в центре масс) осей инерции тела $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_s', \mathbf{e}_s''$ относительно осей инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Из общих теорем об изменении импульса и кинетического момента вытекает, что

$$M\ddot{\mathbf{s}} = \Phi, \quad (9.11)$$

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \mathbf{G}_S, \quad (9.12)$$

где $\Phi = \Sigma \mathcal{F}$, $\mathbf{G}_S = \Sigma [\rho \times \mathcal{F}]$. Это — динамические уравнения движения тела, второе из которых может оказаться частным случаем уравнения для чистых вращений, рассмотренных выше, при условии, что момент $\mathbf{G}_S$ не зависит от положения S . Если сумма всех внешних сил Φ в свою очередь не зависит от ориентации тела, то центр S движется как материальная точка, а вращение вокруг него происходит независимо.

Теореме об изменении кинетической энергии удобно придать слегка модифицированный вид. Справедливы формулы

$$1) T = \frac{M \dot{\mathbf{s}}^2}{2} + T_S, \quad (9.13)$$

$$2) \frac{dT}{dt} = (\dot{\mathbf{s}}, \Phi) + (\omega, \mathbf{G}_S). \quad (9.14)$$

В силу (11) и (7) доказывать надо только первую из них:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (\dot{\mathbf{s}} + [\omega \times \rho])^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2} \Sigma m [\omega \times \rho]^2 + \underline{(\mathbf{s}, [\omega \times \Sigma m \rho])};$$

подчеркнутое слагаемое равно нулю.

Аналогично

$$\Lambda_Q = M[\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}] + \Lambda_S.$$

(Вернемся ненадолго к вращениям. Пусть $Q = O$. Тогда

$$\Lambda_Q = M[\mathbf{s} \times [\omega \times \mathbf{s}]] + \Lambda_S,$$

$$T = \frac{1}{2} (\Lambda_Q, \omega) = \frac{M}{2} [\omega \times \mathbf{s}]^2 + T_S(\omega),$$

и в силу (4) имеет место формула Гюйгенса—Штейнера:

$$I_Q(\mathbf{f}) = M d^2 + I_S(\mathbf{f}),$$

где $d = |\mathbf{f} \times \mathbf{QS}|$ — расстояние между осями Qf и Sf . Таким образом, $I_S(\mathbf{f})$ является минимальным среди всех $I_Q(\mathbf{f})$. Формула Гюйгенса—Штейнера полезна при решении конкретных задач).

Может статься, что нам придется рассматривать движение одного и того же тела в разных ситуациях, когда на него действуют разные системы сил. Легко видеть, что движение будет одним и тем же, если у обеих систем во всех положениях один и тот же вектор Φ (сумма всех сил) и одинаковые суммарные моменты

$\mathbf{G}_S$ относительно центра масс. Более того, проверить равенство моментов можно не только относительно центра масс, но и относительно любой точки A , так как

$$\mathbf{G}_A = \sum [(\overline{AS} + \rho) \times \mathcal{F}] = [\overline{AS} \times \Phi] + \mathbf{G}_S,$$

$$\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_S + [\Phi \times \overline{SA}],$$

так что G_A выражается через $\mathbf{G}_S$, Φ , $\overline{SA}$ (и наоборот). Последняя формула аналогична формуле Эйлера:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_S + [\omega \times \overline{SA}].$$

Это наводит на мысль придать теореме об изменении кинетической энергии твердого тела еще одну форму:

$$\frac{dT}{dt} = (\Phi, \mathbf{v}_A) + (\mathbf{G}_A, \omega). \quad (9.15)$$

Доказательство очевидно. Вычисление Φ и $\mathbf{G}_A$ называется приведением сил к точке A . Иногда просто говорят, что на тело действует сила Φ и момент $\mathbf{G}_A$.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЕНИИ

Допустим, что тело с достаточно регулярной поверхностью движется (катится с проскальзыванием) по некоторой неподвижной опоре, чья поверхность также достаточно регулярна; например бильярдный шар катится по столу. В месте соприкосновения тела и опоры оба, реально говоря, деформируются, несколько стираются, нагреваются и так далее. Учесть точно все эти феномены невозможно, поэтому примем модельный подход, согласно которому

а) движущееся тело и опора не деформируются и, следовательно, касаются только в одной точке;

б) вместе с тем в результате взаимодействия на тело действуют некоторые силы, при приведении к точке касания P имеющие сумму $\mathbf{R}$ и момент $\mathbf{M}_P$ (рис. 21).

Дальнейшее уточнение модели состоит в задании $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_P$ некоторыми формулами:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{v}_P, \omega, \dots), \quad \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_P(\mathbf{v}_P, \omega, \dots),$$

где $\mathbf{v}_P$ — скорость той точки тела, которая в данный момент времени осуществляет соприкосновение с опорой.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности опоры в точке P . Сила $\mathbf{R}_n = (\mathbf{R}, \mathbf{n})\mathbf{n}$ называется нормальным давлением, сила $\mathbf{R}_\tau = \mathbf{R} - \mathbf{R}_n$, лежащая в касательной плоскости, называется силой трения. Момент $\mathbf{M}_n = (\mathbf{M}_P, \mathbf{n})\mathbf{n}$ называется моментом трения вращения, момент $\mathbf{M}_\tau = \mathbf{M} - \mathbf{M}_n$, лежащий в касательной плоскости, — моментом трения качения. Относительно функций $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_P$ в общем случае можно утверждать, что

$$(\mathbf{R}, \mathbf{v}_P) + (\mathbf{M}_P, \omega) \leq 0,$$

т. е. силы трения вносят, вообще говоря, отрицательный вклад в изменение кинетической энергии (и энергии полной).

Если трактовать катящееся твердое тело как идеализированную систему, то силы взаимодействия с неподвижной поверхностью не оказывают влияния на изменение энергии. Это вытекает из теоремы 1 темы 8. Таким образом, написанное только что неравенство превращается в равенство. При этом вполне возможно, что сила трения $R_t \neq 0$. В самом деле, влияние ее нейтрализовано тем, что $v_P = 0$ (качение без проскальзывания).

Продолжим описание сил взаимодействия. Примем, что

$$v_P \neq 0 \Rightarrow M_P = 0$$

(при нулевом проскальзывании моментом можно пренебречь).

Довольно просто описывается модель вязкого трения:

$$R_t = -Cv_P, \quad M_P \equiv 0, \quad (9.16)$$

где коэффициент C может зависеть и от места и от самой скорости v_P .

Практически это единственная модель, в которой R , M^P описываются гладкими функциями. В динамике точки мы уже имели дело с сухим трением, при котором уравнения движения получались кусочно-гладкими. В динамике твердого тела соответственно принимается, что поверхность характеризуется коэффициентом трения скольжения k (для простоты — постоянным) так, что

$$v_P \neq 0 \Rightarrow R_t = -k |R_n| \frac{v_P}{v_P}, \quad M_P = 0. \quad (9.17)$$

Ненулевой момент M_P возникает только при чистом качении: $v_P \equiv 0$. В принципе выражение для него должно учитывать форму тела и поверхности и взаимное расположение их относительно друг друга. Это громоздко и практически не интересно. Поэтому мы ограничимся случаем качения шара радиуса r по плоскости или сферической поверхности. Пусть $\omega_\tau = \omega - (\omega, n)n$ — касательная составляющая угловой скорости шара: поверхность характеризуется еще и коэффициентом трения качения κ так, что

$$v_P \equiv 0, \quad \omega_\tau \neq 0 \Rightarrow |R_t| \leq k |R_n|, \quad M_P = -\kappa r |R_n| \frac{\omega_\tau}{|\omega_\tau|}. \quad (9.18)$$

При $\omega_\tau = 0$ возникает только трение верчения, но это неинтересный случай. Трение верчения можно внести и в (18). Дальнейшие усложнения возможны такие: коэффициенты k и κ могут не быть постоянными, коэффициент k в (17) может быть не равен (быть больше) k в (18) и так далее. Однако и простейшая модель сухого трения уже достаточно сложна.

Аналогично эта модель строится для плоских движений осесимметричных тел (например, для качения диска по кривой). При этом вектор $\omega = \omega_\tau$ перпендикулярен плоскости движения.

ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Допустим, что система отсчета $Oxuz$ не является инерциальной.

Тогда при составлении уравнений движения к заданным силам надо добавить силы инерции:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{пер}} &= -m(\mathbf{a}_0 + [\dot{\Omega} \times (\overline{OS} + \rho)] + [\Omega \times [\Omega \times (\overline{OS} + \rho)]], \\ \Psi_{\text{кор}} &= -2m[\Omega \times (\dot{s} + [\omega \times \rho])],\end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_0$ — ускорение начала системы координат, $\Omega = \Omega_{\text{пер}}$ — ее угловая скорость относительно какой-либо (неназванной) инерциальной системы координат. В дальнейших вычислениях используется тот факт, что $\sum m\mathbf{q} = 0$, в силу чего все выражения, линейные по $\mathbf{q}$, при суммировании дают нуль. Поэтому просуммировать силы инерции по всему телу легко:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{пер}} &= -M(\mathbf{a}_0 + [\dot{\Omega} \times \overline{OS}] + [\Omega \times [\Omega \times \overline{OS}]]), \\ \Phi_{\text{кор}} &= -2M[\Omega \times \dot{s}].\end{aligned}\quad (9.19)$$

Выражения такие же, как для материальной точки. Теперь надо вычислить суммарный момент сил инерции относительно S :

$$\mathbf{G}_S^{\text{пер}} = \sum [\rho \times \Psi_{\text{пер}}], \quad \mathbf{G}_S^{\text{кор}} = \sum [\rho \times \Psi_{\text{кор}}]. \quad (9.20)$$

Напомним, что с точки зрения инерциальной системы координат тело участвует в двух движениях: переносном и относительном, или, более точно, скорость каждой точки тела складывается из относительной и переносной. Соответственно имеют смысл выражения «относительный импульс» (в наших обозначениях $\mathbf{P}_{\text{отн}} = M\dot{\mathbf{s}}$) и «переносный импульс» тела — тот импульс, который имеет тело относительно инерциальной системы отсчета, когда оно неподвижно относительно системы $Oxuz$. Легко видеть, что $\mathbf{P}_{\text{пер}} = M(\mathbf{v}_0 + [\Omega \times \overline{OS}])$. Имеют смысл выражения «относительный» и «переносный» собственные кинетические моменты:

$$\begin{aligned}\Lambda_S^{\text{отн}} &= \sum m[\rho \times [\omega \times \rho]], \\ \Lambda_S^{\text{пер}} &= \sum m[\rho \times [\Omega \times \rho]].\end{aligned}$$

Тот и другой моменты, конечно, удобно вычислять в главном центральном репере тела. Величина

$$I(S) = \sum m\rho^2 = \frac{A+B+C}{2} \quad (9.21)$$

называется полным центральным моментом инерции.

Введем также «ускорительный момент»:

$$\mathbf{H}_S^{\text{пер}} = -\sum m[\rho \times [\dot{\Omega} \times \rho]].$$

Итоговые формулы для моментов сил инерции имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_S^{\text{пер}} &= -[\Omega^{\text{пер}} \times \Lambda_S^{\text{пер}}] + \mathbf{H}_S^{\text{пер}}, \\ \mathbf{G}_S^{\text{кор}} &= 2[\omega^{\text{отн}} \times (I\Omega^{\text{пер}} - \Lambda_S^{\text{пер}})].\end{aligned}\quad (9.22)$$

Переход от (20) к (22) не использует ничего, кроме формулы двойного векторного произведения.

Тема 10

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ В РАЗНЫХ АСПЕКТАХ

Мы говорим, что имеется замкнутая система материальных точек, если в ней действуют только внутренние силы:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad (10.1)$$

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

У такой системы сохраняется кинетический момент, импульс и очень часто полная энергия (но это не обязательно, так как в числе внутренних сил могут быть силы трения). Первым и очень важным примером является

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{f m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{f m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{cases} \quad (10.2)$$

Она сводится к задаче о движении одной точки в поле тяготения неподвижного центра двумя способами. Первый: разделим уравнения (10.1) на m_1 и m_2 соответственно и вычтем; получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (10.3)$$

Это уравнение движения точки единичной массы в поле тяготения точки массы $M = m_1 + m_2$.

Второй способ. Учтем, что центр масс движется равномерно, и перейдем в систему координат с неврашающимися осями и началом в S . Это — инерциальная система, в которой справедливы уравнения (1) с заменой $\mathbf{r}_i$ на $\mathbf{q}_i$; кроме того,

$$m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2 \equiv 0. \quad (10.4)$$

Используя это, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 &= \pm \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} m_i \mathbf{p}_i, \\ \ddot{\mathbf{p}}_i &= -f \frac{M m^3}{m_i^3 |\mathbf{p}_i|^3} \mathbf{p}_i. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Последнее аналогично (10.3). Величина

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (10.6)$$

называется приведенной массой системы. Заметим, что (10.3) можно представить в виде

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = -\text{grad} \frac{f m_1 m_2}{r}.$$

Поэтому проделанные рассуждения легко обобщить: движение двух материальных точек с галилеево-инвариантным потенциалом:

$$V = \bar{V}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \quad (10.7)$$

приводится путем исключения интеграла импульса к исследованию движения материальной точки, имеющей приведенную массу m в поле с потенциалом $V = \bar{V}(|\mathbf{r}|)$. Итак, рассмотрим

ДВИЖЕНИЕ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

СИЛ:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V(|\mathbf{r}|); \quad (10.8)$$

это движение обладает интегралами кинетического момента:

$$[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{c} \quad (10.9)$$

(на массу мы сократили) и энергии:

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = h. \quad (10.10)$$

Эти интегралы позволят нам детально исследовать движение. Подчеркнем, что уравнения (8) не потребуются вовсе.

Лемма.

Движение происходит всегда в так называемой плоскости Лапласа, перпендикулярной постоянному вектору кинетического момента $\mathbf{c}$, если $\mathbf{c} \neq 0$.

Если же $\mathbf{c} = 0$, то движение происходит по прямой.

Действительно, $(\mathbf{r}(t), \mathbf{c}) = (\mathbf{r}, [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]) \equiv 0$. При $\mathbf{c} = 0$ начальные условия таковы, что $\mathbf{r}_0 \parallel \dot{\mathbf{r}}_0$, и последнее утверждение следует из теоремы о единственности решений: движение может происходить по прямой и потому обязательно будет именно таким.

Итак, при $\mathbf{c} = 0$ мы непосредственно имеем прямолинейное движение в потенциальном поле (тема 5). Впредь считаем $\mathbf{c} \neq 0$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\mathbf{c} = c\mathbf{e}_z$, $c > 0$, т. е. движение происходит в плоскости Oxy . Интегралы движения принимают вид

$$(x\dot{y} - y\dot{x}) = c, \quad (10.11)$$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}) = h.$$

Поскольку $V = V(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, напрашивается мысль использовать полярные координаты $r > 0$, $\varphi \bmod 2\pi$;

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Задать движение можно и при помощи функций $x = x_*(t)$, $y = y_*(t)$, и при помощи функций $r = r_*(t)$, $\varphi = \varphi_*(t)$; при этом

$$\dot{x} = \cos \varphi \dot{r} - r \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \sin \varphi \dot{r} + r \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

Подставляя эти зависимости в интегралы движения (11), пере-

писываем последние в новом, более удобном виде:

$$H = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = h, \quad (10.12)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = c.$$

Из интеграла момента

$$\dot{\varphi} = c/r^2, \quad (10.13)$$

так что после подстановки в интеграл энергии получаем

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mc^2}{2r^2} + V(r) = h \quad (10.14)$$

(ниже мы покажем, почему во многих задачах можно заранее быть уверенным, что $r(t)$ никогда не обращается в нуль при $c \neq 0$). Видим, что изменение $r(t)$ полностью определяет

приведенная потенциальная энергия:

$$V_c(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + V(r) \quad (10.15)$$

по формулам одномерного движения. Слово «приведение» здесь означает, что исключается из рассмотрения координата φ .

Пока $r(t) \neq 0$, радиус-вектор поворачивается все время в одну и ту же сторону, замечая при этом равные площади в равные промежутки времени. В самом деле, из (13) видно, что $\dot{\varphi} > 0$, т. е. $\varphi(t)$ — монотонная функция. Что касается площади, то известно, что площадь криволинейного сектора (рис. 50)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{c}{2} (t_2 - t_1),$$

что и требовалось. Поскольку $r^2 \dot{\varphi} = 2dS/dt$, интеграл момента часто называют интегралом площадей.

Находить $r(t)$, а потом $\varphi(t)$ неудобно и не наглядно. Попробуем определять траектории движения, т. е. зависимости $r = r(\varphi)$. Поскольку $\varphi = \varphi_*(t)$ — монотонная функция, то она имеет обратную, причем глобально на всей области определения (пока $r(t) \neq 0$). Обозначим ее $t = t^*(\varphi)$. Подставляя в $r = r^*(t)$, получим $r = r^{**}(\varphi)$. Имеем (опуская звездочки)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}.$$

Функция $\rho = 1/r$ называется обратным (в алгебраическом смысле слова) радиусом.

Внесем $dr/dt = -cd\rho/d\varphi$ в интеграл энергии:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{c^2} V_c \left(\frac{1}{\rho} \right)}_{\Pi_c(\rho)} = \frac{h}{c^2}. \quad (10.16)$$

Последняя зависимость снова имеет такой же вид, как интеграл энергии в одномерном движении. Отсюда вытекает возможность определить $\rho(\varphi)$ (а потом $r(\varphi)$) в квадратурах.

Важнейшим примером является

$$\text{ЗАДАЧА КЕПЛЕРА: } V = -\frac{\mu m}{r}.$$

Имеем (рис. 53)

$$V_c = \frac{\Gamma mc^2}{2r^2} - \frac{\mu m}{r}, \quad \Pi_c = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\mu m \rho}{c^2}.$$

Поскольку размерности

$$[m]=M, [c]=L^2/T, [\mu]=L^3/T^2$$

независимы, для выкладок примем $m=\mu=c=1$. Тогда

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = 2h - \rho^2 + 2\rho,$$

$$\pm \frac{d\rho}{\sqrt{1+2h-(\rho-1)^2}} = d\varphi,$$

$$\text{Arccos } \frac{\rho-1}{1+2h} = \varphi - \varphi_0.$$

Последний шаг надо трактовать так: каждая ветвь многозначной функции Arccos удовлетворяет предшествующему дифференциальному уравнению со знаком плюс или минус. Вместе с тем переход от одной ветви к другой в некотором смысле непрерывен (рис. 41). Итак, оперируя с многозначной функцией, мы избавились от поэтапного интегрирования с чередованием знаков, какое проводили в теме 6. Это вполне соответствует существу дела и показывает, что упомянутую многозначность не следует принимать слишком всерьез. Осталось написать

$$\rho = 1 + (1+2h) \cos(\varphi - \varphi_0).$$

В размерных переменных

$$\frac{c^2}{\mu} \rho = 1 + \left(1 + \frac{2hc^2}{m\mu^2}\right) \cos(\varphi - \varphi_0),$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e \cos(\varphi - \varphi_0)}{\rho}, \quad \rho = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = 1 + \frac{2hc^2}{m\mu^2}.$$

Это — фокальное уравнение конического сечения в полярных координатах, а именно получается

при $0 \leq e < 1$ ($-m\mu^2/c^2 \leq h < 0$) эллипс,

при $e = 1$ ($h = 0$) парабола,

при $e > 1$ ($h > 0$) гипербола.

Можно попробовать найти $\varphi(t)$. Из интеграла площадей

$$r^2 d\varphi = c dt,$$

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{c} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))^2}.$$

Этот интеграл берется подстановкой

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

после чего

$$t - t_0 = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}(1 - e^2)^{3/2}} (E - e \sin E). \quad (10.17)$$

Переменная $\theta = \varphi - \varphi_0$ называется истинной аномалией, переменная E — эксцентрической аномалией. Она имеет простой геометрический смысл (рис. 55). Выразить E через t в элементарных функциях невозможно.

Найдем период обращения τ в эллиптическом движении. Площадь эллипса равна, очевидно, $S = c\tau/2$. С другой стороны, известно, что $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, где a , b большая и малая полуоси эллипса:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} \right) = \frac{p}{1 - e^2} = - \frac{\mu m}{2h}.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{2\pi}{c} a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Это согласуется с (10.7), если посмотреть, на сколько изменится t , когда E изменится на 2π .

В произвольном поле с потенциалом $V(r)$ аналогом и обобщением эллиптического движения в задаче Кеплера являются

ФИНИТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ.

Если зафиксированы постоянные c , h , то из (14) следует, что траектория $r(\varphi)$ лежит в области возможности движения:

$$\mathfrak{M}_c^h = \{r, \varphi : V_c(r) \leq h\}. \quad (10.18)$$

Когда на графике V_c получается потенциальная яма, имеем $\mathfrak{M}_c^h$, вообще говоря, в виде кольца:

$$\mathfrak{M}_c^h = \{r_2 \leq r \leq r_1\}.$$

В общем случае таких колец может быть несколько, возможно также, что $r_2 = 0$ или $r_1 = \infty$. Движение называется финитным, когда оно происходит в замкнутой связной компоненте $\mathfrak{M}_c^h$:

$$0 < r_2 \leq r \leq r_1 < \infty,$$

т. е. не уходит в бесконечность и не падает в центр силы. Для

обратного радиуса аналогично должно быть

$$0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 < \infty, \quad \rho_i = \frac{1}{r_i},$$

а на графике Π_c также получается потенциальная яма.

Как установлено в теме 6, в этих условиях $\rho(\varphi)$ периодически изменяется от ρ_2 до ρ_1 и обратно, а следовательно, $r(\varphi)$ периодически изменяется от r_2 до r_1 . В итоге имеем качественную картину траекторий, типа изображенной на рис. 52. Все участки траектории между границами кольца одинаковы. Кстати, можно обратить внимание, что в окрестности меньшего радиуса на рис. 52 сила получается отталкивающей (разложить ее по естественному реперу), а в окрестности большего радиуса — притягивающей. Если имеем только притягивающую силу, то картина должна быть такой, как на рис. 47. Угол Φ между максимумом и минимумом $r(\varphi)$ (это аналог полупериода при движении по прямой) называется апсидальным. Он равен

$$\Phi(c, h) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{h}{c^2} - \Pi_c(\rho) \right)}}. \quad (10.19)$$

В задаче Кеплера при $h < 0$ имеем $\Phi \equiv \pi$ (рис. 54), для гармонического осциллятора $\Phi \equiv \pi/2$.

Критическим точкам функции V_c (или Π_c) отвечают относительные равновесия:

$$r(t) \equiv r_* \Leftrightarrow \frac{d}{dr} V_c(r) |_{r=r_*} = 0, \quad (10.20)$$

$$\rho(\varphi) \equiv \rho_* \Leftrightarrow \frac{d}{d\rho} \Pi_c(\rho) |_{\rho=\rho_*} = 0.$$

В этом случае

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r_*^2} = \text{const}, \quad h_* = \frac{m}{2} r_*^2 \dot{\varphi}^2 + V(r_*) = \frac{mc^2}{2r_*^2} + V(r_*) = V_c(r_*),$$

т. е. энергия относительного равновесия, отвечающего критической точке приведенной потенциальной энергии V_c , равна соответствующему критическому значению.

Если критическая точка есть минимум, то про соответствующее относительное равновесие говорят, что оно орбитально устойчиво (так как близкие движения лежат в узком кольце), в противном случае — неустойчиво (вспомним асимптотические движения в одномерных системах, аналог которых имеется и здесь). Если h не намного отличается от минимального значения h_* , то по формуле Линдштедта (тема 6)

$$\Phi(c, h) = \pi \sqrt{\frac{\Pi_c''}{m}} \left(1 + \frac{5\Pi_c'''^2 - 3\Pi_c''\Pi_c''''}{24\Pi_c''^3} (h - h_*) \right) + O(h - h_*)^2,$$

причем все производные ($' \equiv d/d\rho$) вычисляются при $\rho = \rho_*$.

Теорема Бертрана. Предположим, что потенциальная энергия $V(r)$ такова, что

1) существуют нетривиальные (отличные от относительных равновесий) финитные движения;

2) траектории всех финитных движений замкнуты.

Тогда

$$V = -\frac{\mu m}{r}, \quad \mu > 0,$$

или

$$V = \frac{1}{2} k r^2, \quad k > 0,$$

т. е. имеем тяготение Ньютона или упругую силу.

Доказательство. Можно считать $m=1$. Для того чтобы траектория была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(c, h) = \frac{p}{q} \pi,$$

где p, q — натуральные числа без общих делителей. Поскольку $\Phi(c, h)$ — непрерывная функция, отсюда следует, что $\Phi(c, h) = \text{const}$ в связной области определения. Но тогда на основании формулы Линдштедта

$$\Psi(c) = \lim_{h \rightarrow h_*} \Phi(c, h) = \pi \sqrt{\Pi_c''} = \text{const}, \quad (10.21)$$

и

$$5\Pi_c''''^2 - 3\Pi_c''\Pi_c''''|_{\rho_*} = 0 \quad (10.22)$$

для всех $\rho_*(c)$, определяемых из уравнения

$$\Pi_c' = \rho + \frac{1}{c^2} W'(\rho) = 0, \quad W(\rho) = V\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (10.23)$$

Используем первое обстоятельство: имеем

$$\Pi_c'' = 1 + \frac{1}{c^2} W''(\rho),$$

так что

$$\Psi(c) = \text{const} \Rightarrow \frac{W''(\rho_*(c))}{c^2} = \lambda = \text{const}.$$

Отсюда с учетом (23)

$$\begin{aligned} \rho W'' + \lambda W' &= 0, \\ W' &= K \rho^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получаем

$$\Pi_c'' = 1 - K \lambda \rho^{-\lambda-1},$$

$$\Pi_c''' = K\lambda(\lambda + 1)\rho^{-\lambda-2},$$

$$\Pi_c'''' = -K\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)\rho^{-\lambda-3}.$$

Уравнение (23) приобретает вид

$$\rho_* + K\rho_*^{-\lambda} = 0,$$

так что в критической точке

$$\Pi_c'' = 1 + \lambda, \quad \Pi_c''' = -\frac{\lambda(1 + \lambda)}{\rho_*}, \quad \Pi_c'''' = \frac{\lambda(1 + \lambda)(2 + \lambda)}{\rho_*^2}.$$

В итоге

$$5\Pi_c''''^2 - 3\Pi_c''\Pi_c'''' = 0,$$

$$5\lambda^2(\lambda + 1)^2 - 3\lambda(1 + \lambda)^2(\lambda + 2) = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -1$$

$$W_1' = K, \quad W_2' = K\rho^{-3}, \quad W_3' = K\rho,$$

$$W_1 = K\rho, \quad W_2 = -\frac{K}{2}\rho^{-2}, \quad W_3 = \frac{K}{2}\rho^2,$$

$$V_1 = \frac{K}{r}, \quad V_2 = -\frac{K}{2}r^2, \quad V_3 = \frac{K}{2r^2},$$

что и требовалось. Определить знаки K , при которых существуют нетривиальные финитные движения, не составляет труда. В случае V_3 они вообще невозможны.

Детально обсудив задачу двух тел в классическом варианте, когда размерами их пренебрегают, мы теперь сделаем несколько шагов по пути ее обобщения, а именно предположим, что размерами одного из тел пренебречь нельзя.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ «ТЕЛО—ТОЧКА»

В инерциальной системе отсчета $Oxyz$ рассматривается гравитационное взаимодействие твердого тела массы M (с центром масс в точке S) и материальной точки P массы μ . Пусть A — общий центр масс системы $OS = s$, $OP = d$, $AS = \sigma$, $AP = \delta$:

$$OA = (Ms + \mu d) / (M + \mu).$$

При малом μ/M точка A почти совпадает с S (рис. 26). Тело действует на точку с силой F , а воздействие точки на тело приводится к суммарной силе Φ и моменту G_S . Уравнения движения системы «тело—точка» имеют вид

$$M\ddot{s} = \Phi, \quad \frac{d\Lambda_S}{dt} = G_S, \quad \mu\ddot{d} = F.$$

Нам надо вычислить векторы $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{G}_S$ в зависимости от взаимного расположения тела и точки.

Заметим для этого, что система «тело—точка» является замкнутой, так что сохраняются ее импульс:

$$\bar{\mathbf{P}} = M\dot{\mathbf{s}} + \mu\dot{\mathbf{d}} = \text{const},$$

и кинетический момент относительно общего центра масс:

$$\bar{\mathbf{L}}_A = M[\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}}] + \mu[\boldsymbol{\delta} \times \dot{\boldsymbol{\delta}}] + \mathbf{L}_S = \text{const}.$$

Иными словами,

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}} = M\ddot{\mathbf{s}} + \mu\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{F} \equiv 0,$$

$$M[\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{\sigma}}] + \mu[\boldsymbol{\delta} \times \ddot{\boldsymbol{\delta}}] + \frac{d\mathbf{L}_S}{dt} = [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{\Phi}] + [\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{F}] + \mathbf{G}_S \equiv 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{\Phi} = -\mathbf{F} \quad (10.24)$$

(но не обязательно $\mathbf{\Phi}$, $F\|\overline{SP}\|$),

$$\mathbf{G}_S = -[\overline{SP} \times \mathbf{F}]. \quad (10.25)$$

Формулы (24) и (25), во-первых, сводят вопрос о вычислении $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{G}_S$ к определению только $\mathbf{F}$. Во-вторых, они носят векторный характер, так что их можно раскладывать по любому реперу. Выберем тот, который удобнее всего: главный центральный репер $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ тела M . Тогда нам фактически осталось вычислить силу притяжения массы μ к неподвижному телу M . Эта сила потенциальна. Поэтому вычислим

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА.

Пусть в репере $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ точка μ имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{SP}$ и координаты

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

и пусть тело состоит из точек m_i с радиусами-векторами $\mathbf{q}_i$. Тогда (ср. с темой 3)

$$V = -f\mu \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{r}|}.$$

Разложим потенциал по степеням обратного радиуса. Пусть R — характерный размер тела. Будем вести разложение по степеням R/r . Для выкладок положим $f\mu = M = R = 1$, индекс суммирования i опустим и обозначим $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$:

$$-V = \sum \frac{m}{\sqrt{(\rho - \mathbf{r}, \rho - \mathbf{r})}} = \frac{1}{r} \sum \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}(\rho, \mathbf{e}_r) + \frac{\rho^2}{r^2}}} =$$

(поскольку $(1 + \chi)^{-1/2} = 1 - \frac{\chi}{2} + \frac{3}{8}\chi^2 + \dots$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \Sigma m \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} (\rho, \mathbf{e}_r) + \frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} 4 \frac{(\rho, \mathbf{e}_r)^2}{r^2} + \dots \right] = \\
&\text{(поскольку } \Sigma m \rho = 0, \Sigma m = 1) \\
&= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2r^2} \Sigma m (-\rho^2 + 3(\rho, \mathbf{e}_r)^2) \right) + \dots = \\
&= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \left[\Sigma m \rho^2 - \frac{3}{2} \Sigma m (\rho^2 - (\rho, \mathbf{e}_r)^2) \right] \right) + \dots = \\
&\text{(вспомним моменты инерции: (9.4) и (9.21))} \\
&= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(I(S) - \frac{3}{2} I_S(\mathbf{e}_r) \right) \right) + \dots
\end{aligned}$$

Учитывая, что (см. (9.5))

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad I_S(\mathbf{e}_r) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2,$$

в общем виде получаем

$$\begin{aligned}
V = -\frac{fM\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B+C-2A}{MR^2} \alpha^2 + \frac{C+A-2B}{MR^2} \beta^2 + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{A+B-2C}{MR^2} \gamma^2 \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + O \left(\left(\frac{R}{r} \right)^4 \right).
\end{aligned}$$

В частности, если $A=B$ (например, когда тело имеет ось симметрии $\mathbf{e}''$) и θ — угол между $\mathbf{e}''$ и $\mathbf{e}_r$, то

$$\begin{aligned}
&\gamma = \cos \theta, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \\
V = -\frac{fM\mu}{r} \left(1 + \frac{A-C}{MR^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) + \dots,
\end{aligned}$$

так что в разложении (3.6)

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{A-C}{MR^2}.$$

Потенциал V представлен у нас в виде

$$V = V(r, \alpha, \beta, \gamma) = V\left(r, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \beta, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \gamma,$$

получаем дифференцированием V по x, y, z силу

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \gamma \right) \right) \mathbf{e}_r - \\
- \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \mathbf{e} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \mathbf{e}' + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \mathbf{e}'' \right).
\end{aligned}$$

Наконец, момент ее равен

$$[\overline{SP} \times \mathbf{F}] = - \begin{vmatrix} \mathbf{e} & \alpha \frac{\partial V}{\partial \alpha} \\ \mathbf{e}' & \beta \frac{\partial V}{\partial \beta} \\ \mathbf{e}'' & \gamma \frac{\partial V}{\partial \gamma} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\gamma \frac{\partial V}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial V}{\partial \gamma} \right) \mathbf{e} + \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}' + \left(\beta \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) \mathbf{e}'' =$$

$$= - \frac{3fM\mu}{r^3} [\beta\gamma(C-B)\mathbf{e} + \gamma\alpha(A-C)\mathbf{e}' + \alpha\beta(B-A)\mathbf{e}''] + O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

Это интересно само по себе и нужно для (25). Видим, что на практике гравитационный момент $\mathbf{G}_S$ имеет тот же порядок малости, что и члены третьей степени по $1/r$ в потенциале.

Добавления к теме 10.

1. ПРИЛИВНОЙ ЭФФЕКТ. Рассмотрим систему Земля—Луна. Оба тела будем считать однородными шарами, так что они притягиваются как точки по закону тяготения Ньютона. Луна вокруг Земли движется примерно по окружности. На поверхности Земли имеется мировой океан и материки. Известно, что в океане и на материках наблюдаются приливные волны (рис. 36): одна волна выпячивается в сторону Луны, другая — в противоположную сторону (на деле эти волны отстают от Луны, но это уже более тонкий эффект). Надо объяснить это явление, т. е. ответить на вопрос, по какой причине малая частица на поверхности Земли имеет тенденцию подняться вверх, когда Луна находится над ней (в зените) или с противоположной стороны (в надире).

С этой целью поместим на поверхности Земли, которую для простоты будем считать невращающейся, грузик массы μ на пружине, и предположим, что натяжение пружины уравнивает силу тяготения к Земле (рис. 37):

$$\mathbf{F}_{\text{нат}} = f \frac{M\mu}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Вести исследование будем в системе отсчета, начало которой все время находится в центре Земли, а оси не вращаются. Эта система координат неинерциальна. Поэтому на грузик действует сила инерции:

$$\Phi_{\text{пер}} = -\mu a_3 = -\mu f \frac{m}{R^2} \mathbf{e}_R.$$

Действует также и сила тяготения к Луне. Ее мы будем для простоты выписывать не в общем случае, а в тех положениях, о которых говорилось выше. Для большей ясности результатов величину r/R будем считать малой.

а) Луна в зените. Тогда имеем в проекции на $\mathbf{e}_r$:

$$F_{\text{доп}} = -f \frac{\mu m}{R^2} + f \frac{\mu m}{(R-r)^2} = \frac{f m \mu}{R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - 1 \right) \approx \\ \approx \frac{f m \mu}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} - 1 \right) = 2f \frac{\mu m}{R^2} r;$$

б) Луна в надире. Тогда аналогично

$$F_{\text{доп}} = f \frac{\mu m}{R^2} - f \frac{\mu m}{(R+r)^2} = \\ = f \frac{\mu m}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} \right) \approx 2f \frac{\mu m}{R^3} r.$$

В обоих случаях дополнительная сила направлена вверх и по величине практически одинакова. Фактически мы имеем дело с разностью ускорений, которые Луна сообщает Земле и грузу.

2. ЭФФЕКТ ЛАРМОРА. В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ рассмотрим (не выходя за пределы классической механики) систему «протон—электрон», помещенную в магнитное поле. Поскольку протон много массивнее электрона, будем первый считать неподвижным и поместим его в начало координат. Расстояние между частицами мало, так что магнитное поле можно считать однородным. Если бы поля не было, то электрон двигался бы по некоторому эллипсу, в фокусе которого находится протон. Однако, помимо силы кулонова притяжения, на электрон действует также сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Будем трактовать ее как силу Кориолиса, возникшую якобы за счет того, что система $O\xi\eta\zeta$ не инерциальна, а вращается с угловой скоростью:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{q}{2mc} \mathbf{B}$$

относительно некоторой инерциальной системы $Oxyz$. Тогда в этой последней на электрон действует также сила

$$\Phi = m [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]],$$

которая при переходе к $O\xi\eta\zeta$ компенсируется переносной силой инерции. Однако эта сила, легко видеть, крайне мала (r мало) и ею можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что в системе $Oxyz$ электрон движется по эллиптической орбите. Следовательно, с точки зрения исходной системы $O\xi\eta\zeta$ движение электрона может быть представлено (рис. 61) как кеплеровское перемещение по эллипсу, вращающемуся вокруг вектора магнитной напряженности $\mathbf{B}$ с угловой скоростью Ω (частота Лармора). Это и требовалось получить.

Тема 11

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА

Мы приступаем к изучению лагранжева формализма, который состоит в использовании уравнений второго порядка:

$$\ddot{q}_i = X_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t), \quad i=1, \dots, n \quad (11.1)$$

специального вида. Но прежде чем конкретизировать этот вид, потребуется ряд определений, и в первую очередь

ДВА ВАРИАНТА ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ.

Обозначим $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

Определение 1. Пусть имеется функция $f = f(q, t)$. Ее полной производной по времени называется функция

$$\dot{f}(\dot{q}, q, t) = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (11.2)$$

зависящая уже от $\dot{q}, q, t$. Если $q = q(t)$, то

$$\frac{d}{dt} f(q(t), t) = \dot{f}\left(\frac{dq}{dt}, q(t), t\right). \quad (11.3)$$

Определение 2. Пусть задана функция $F = F(\dot{q}, q, t)$. Ее полной производной по времени называется функция

$$\dot{F}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i, \quad (11.4)$$

зависящая от $\ddot{q}, \dot{q}, q, t$. Аналогично (3)

$$\frac{d}{dt} F\left(\frac{dq}{dt}, q(t), t\right) = \dot{F}\left(\frac{d^2q}{dt^2}, \frac{dq}{dt}, q(t), t\right). \quad (11.5)$$

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt}, \quad (11.6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dF}{dt}.$$

Определение 3. Если имеется система дифференциальных уравнений второго порядка (1), то полной производной функции в силу системы называется функция

$$\frac{d^X}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} X_i, \quad (11.7)$$

зависящая только от $\dot{q}, q, t$.

Индекс X обычно не пишут, и приходится из контекста уяснять, какая из производных dF/dt имеется в виду, за исключением

ем разве что ситуации

$$\dot{f} = \dot{f}(q, t) \Rightarrow \frac{d^X}{dt} \dot{f} = \ddot{f}. \quad (11.8)$$

Если $d^X F/dt \equiv 0$, то F — первый интеграл системы (1), т. е. $F(\dot{q}(t), q(t), t) = \text{const}$ для всех ее решений.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ (ПОДСТАНОВКА)

по определению имеется тогда, когда заданы зависимости

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^*(\xi_1, \dots, \xi_m, t), \\ &\vdots \\ q_n &= q_n^*(\xi_1, \dots, \xi_m, t). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Обычно принимается, что $m=n$, но пока это не обязательно. Начнем с рассмотрения замен, не зависящих от времени:

$$q = q^*(\xi). \quad (11.10)$$

Если в пространстве $\mathbf{R}^m(\xi)$ есть кривая $\xi = \xi(t)$, то в силу (10) она отображается в пространство $\mathbf{R}^n(q)$: $q = \bar{q}(t) = q^*(\xi(t))$ и при этом

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{d\xi_{\alpha}}{dt}. \quad (11.11)$$

Если дана функция $f = f(q_1, \dots, q_n)$, то для сложной функции (композиции) $f^*(\xi) = f(q^*(\xi))$ справедливо

$$\frac{\partial f^*}{\partial \xi_{\alpha}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_{\alpha}}. \quad (11.12)$$

Введем диаграмму

$$\mathbf{R}_t \xrightarrow{\xi^*} \mathbf{R}_{\xi}^m \xrightarrow{q^*} \mathbf{R}_q^n \xrightarrow{1} \mathbf{R},$$

в которой занумерованы все зависимости в естественном порядке, и перепишем равенства (2) и (3) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \xi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \xi_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\xi_m}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial q_2}{\partial \xi_m} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \xi_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

Имеем зависимость между матрицами Якоби, причем основная матрица $\partial q/\partial \xi$ представлена в двух вариантах, отличающихся транспонированием. Введем сокращенные обозначения:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{df^*}{\partial \xi} = \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial q}.$$

N1 N0 N1 N2

Штрих около символа дифференцирования означает, во-первых, что соответствующие переменные стоят по столбцам. Во-вторых, штрих стоит с той стороны, с которой надо множить матрицу Якоби очередной зависимости при составлении композиций.

Будем говорить, что столбец $\frac{dq}{dt}$ преобразуется в столбец $\frac{d\xi}{dt}$ по векторному правилу (вспомним вектор скорости) и что столбец $\frac{\partial f}{\partial q}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ по ковекторному правилу. Когда из контекста ясно, какие переменные стоят по столбцам, условимся штрих не писать.

Теперь рассмотрим более общие замены

$$q = q^*(\xi, t):$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i^*(\xi, t) = \sum_{\alpha} \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} + \frac{\partial q_i}{\partial t}, \quad (11.13)$$

$$\ddot{q}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_{\alpha}} \ddot{\xi}_{\alpha} + \dots \quad (11.14)$$

Многоточием здесь обозначены выражения, содержащие только $\xi, \dot{\xi}, t$. Если имеются функции

$$f(q, t), F(\dot{q}, q, t), \Phi(\ddot{q}, \dot{q}, q, t),$$

то обозначим звездочкой результат подстановки:

$$f^*(\xi, t) = f(q^*(\xi, t), t),$$

$$F^*(\dot{\xi}, \xi, t) = F(\dot{q}^*(\xi, t), q^*(\xi, t), t),$$

$$\Phi^*(\ddot{\xi}, \dot{\xi}, \xi, t) = \Phi(\ddot{q}^*(\xi, t), \dot{q}^*(\xi, t), q^*(\xi, t), t).$$

Леммы.

0. В силу (13) и (14)

$$\frac{\partial \ddot{q}_i^*}{\partial \xi_{\alpha}} = \frac{\partial \dot{q}_i^*}{\partial \xi_{\alpha}} = \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_{\alpha}}.$$

1. Столбец $\frac{\partial f}{\partial q}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial f^*}{\partial \xi}$ по ковекторному правилу:

$$\frac{\partial f^*}{\partial \xi_{\alpha}} = \sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_{\alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)^*. \quad (11.15)$$

2. Столбец $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$ преобразуется в столбец $\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}}$ по ковекторному правилу:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \frac{\partial \dot{q}_i^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^*. \quad (11.16)$$

Предложение. Всегда

$$\left(\frac{df}{dt} \right)^* = \frac{d}{dt} f^*, \quad \left(\frac{dF}{dt} \right)^* = \frac{d}{dt} F^*, \quad (11.17)$$

т. е. можно сначала вычислить полную производную, потом сделать замену, а можно наоборот. Для контраста заметим, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^* \neq \frac{\partial f^*}{\partial t}, \quad (11.18)$$

так как

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)^* \frac{\partial q_i^*}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^*. \quad (11.19)$$

Тривиальный вывод (17) опустим.

СТУПЕНЧАТАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

(производная Эйлера—Лагранжа)

индекса i функции $F(\dot{q}, q, t)$ вычисляется по формуле

$$[F]_{q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (11.20)$$

В частности,

$$[f]_{q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (11.21)$$

$$\left[\sum_k \dot{f}_k \dot{q}_k \right]_{q_i} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k, \quad (11.22)$$

$$[f]_{q_i} \equiv 0. \quad (11.23)$$

Лемма 3. Столбец $[F]_q$ преобразуется в столбец $[F^*]_\xi$ по ковекторному правилу.

Действительно, в силу (16) с учетом (17)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \right) \frac{\partial q_i^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \left(\sum_k \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial \xi_k \partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_k + \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial t \partial \xi_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right)^* \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \frac{\partial \dot{q}_i^*}{\partial \xi_\alpha} = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right)^* \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \left(\sum_k \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_k} \dot{\xi}_k + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_\alpha \partial t} \right). \end{aligned}$$

Подчеркнутые члены равны. После вычитания

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)^*. \quad (11.24)$$

Если исключить случаи (22), (23), то ступенчатые производные всегда приводят к выражениям, явно зависящим от старших производных $\dot{q}_i$. Приравнявая такие производные нулю, получим дифференциальные уравнения второго порядка, правда, не разрешенные (пока) относительно $\ddot{q}_i$.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА

по определению имеют вид

$$[L]_{q_i} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (11.25)$$

где $L(\dot{q}, q, t)$ — некоторая заданная функция, называемая функцией Лагранжа, или лагранжианом. Уравнения вида (25) впервые рассматривались Эйлером при решении вариационных задач. Позднее Лагранж придал форму (25) уравнениям движения обширного класса задач механики, в связи с чем уравнения (25) обычно называются просто уравнениями Лагранжа.

Цепочка примеров.

1. Уравнения движения материальной точки в потенциальном поле сил имеют лагранжев вид, причем L — разность кинетической и потенциальной энергий.

Доказательство. Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Положим $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, и введем лагранжиан

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3, t).$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (m\dot{q}_i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = m\ddot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

А это и требовалось.

2. Точно так же уравнениям Ньютона системы свободных материальных точек, движущихся под действием потенциальных сил:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11.26)$$

можно придать форму уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \quad (11.27)$$

где

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (11.28)$$

3. Допустим, что имеем идеализированную систему с r связями $f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ и потенциальными силами.

Система уравнений Лагранжа с множителями

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{s=1}^r \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i}, & i = 1, \dots, n, \\ f_s = 0, & s = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (11.29)$$

является частным случаем системы (7.4) и одновременно имеет лагранжев вид: если мы положим

$$\mathcal{L} = L + \sum_{s=1}^r \lambda_s f_s \quad (11.30)$$

и станем рассматривать λ_s как переменные, равноправные r_i :

$$q = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

то будем иметь ($\mathcal{L}$ не зависит от $\dot{\lambda}_s$!)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} &\equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} \equiv \\ &\equiv m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_s} &= -f_s = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Наша цепочка примеров превращается в ряд утверждений весьма общего характера. Прежде чем ее продолжить, укажем на

ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ:

1. Если вместо лагранжиана L взять лагранжиан $\mathcal{L} = cL + \dot{f}$, то уравнения $[L]_{q_i} = 0$ будут эквивалентными исходным.

Доказательство: см. (23).

2. Если имеется замена переменных $q=q^*(\xi, t)$ (вот здесь уже $m=n$), невырожденная в том смысле, что

$$\det \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \neq 0 \quad (11.31)$$

(иначе говоря, обратимая), то уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L^*}{\partial \xi_\alpha} = 0 \quad (11.32)$$

эквивалентны исходным.

Доказательство. Чтобы преобразовать (25) в силу замены, надо взять q^* , вычислить $\dot{q}^*$ и $\ddot{q}^*$ по формулам (13) и (14) и все подставить в (25). Коротко говоря, надо вычислить

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)^* = 0.$$

Последние уравнения в силу (24) отличаются от уравнений (32) умножением на невырожденную матрицу (31) и потому эквивалентны им.

Вернемся к идеализированным системам с потенциальными силами. В пространстве $\mathbf{R}^{3N} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$ при каждом фиксированном t уравнения связей задают некоторую поверхность (подмногообразие) размерности $n = 3N - r$:

МНОГООБРАЗИЕ ПОЛОЖЕНИЙ

$$\mathfrak{M} = \{f_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \dots = f_r(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0\}.$$

Число n называется числом степеней свободы системы (для понимания дальнейшего достаточно представить себе двумерную поверхность в трехмерном пространстве $N=1, r=1$, т. е. ограничиться движением точки по несероховатой поверхности, о котором уже говорилось в теме 5). Локальные координаты на многообразии положений имеют специальное название — **определяющие координаты** (говорят также «лагранжевы», или «обобщенные координаты»). Смысл термина в том, что расположение системы точек m_i в пространстве однозначно определяется n величинами (фактически мы имеем частный случай (9)):

$$\mathbf{r}_v = \bar{\Gamma}(q_1, \dots, q_n, t), \quad (11.33)$$

где $\bar{\Gamma}_v(q, t)$ — некоторые явные зависимости такие, что

$$\text{rang} \frac{\partial (\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_N)}{\partial (q_1, \dots, q_n)} = n, \quad (11.34)$$

$$f_s(\bar{\Gamma}_1(q, t), \dots, \bar{\Gamma}_N(q, t)) \equiv 0. \quad (11.35)$$

В силу формул (33) аналогично (13)

$$\dot{\mathbf{r}}_v = \sum_i \frac{\partial \bar{\Gamma}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{\Gamma}_v}{\partial t}. \quad (11.36)$$

Перемещение системы $\{\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_v(t)\}$ можно задать в виде

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)), \quad (11.37)$$

имея в виду вычислять $\mathbf{r}_v(t)$ подстановкой (37) в (33).

Теорема.

Набор функций $q_1(t), \dots, q_n(t)$ задает движение системы тогда и только тогда, когда удовлетворяет уравнениям (Эйлера—)Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (11.38)$$

где $\bar{L} = \bar{T} - \bar{V}$, а подробнее

$$\bar{L}(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{d\bar{\mathbf{r}}_v}{dt} \right)^2 - V(\bar{\mathbf{r}}_1(q, t), \dots, \bar{\mathbf{r}}_N(q, t)) \quad (11.39)$$

есть результат подстановки (33), (36) в (28).

Доказательство. Пусть для краткости $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$.

Лемма о трансверсальных координатах. Существует невырожденная замена

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(q_1, \dots, q_n, \chi_1, \dots, \chi_r, t), \quad (11.40)$$

такая, что

$$\mathbf{r}^*(q, 0, t) \equiv \bar{\mathbf{r}}(q, t), \quad (11.41)$$

$$\dot{f}_s(\mathbf{r}^*(q, \chi, t), t) \equiv \chi_s. \quad (11.42)$$

Будем искать эту замену в виде

$$\mathbf{r}^* = \bar{\mathbf{r}} + \sum_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{n}_{\sigma}, \quad (11.43)$$

где

$$\mathbf{n}_{\sigma}(q, t) = \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} \bigg|_{\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(q, t)}. \quad (11.44)$$

Поскольку параметр t произвольно фиксируется, писать его больше не будем. Подставляя (43) в (42), получаем формально

$$\varphi_s(q, \rho) \equiv f_s(\bar{\mathbf{r}} + \sum \rho_{\sigma} \mathbf{n}_{\sigma}) = \chi_s.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_{\sigma}} \bigg|_{\rho=0} = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}_{\sigma} = (\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_{\sigma}).$$

Справа получаем элементы определителя Грама линейно независимых векторов $\mathbf{n}_s$, который отличен от нуля. По теореме о неявной функции при каждом q величины ρ суть однозначные функции χ . В результате

$$\rho = \rho(q, \chi),$$

причем $\rho(q, 0) \equiv 0$. Лемма доказана.

В силу второй теоремы об эквивалентности уравнения (29), порожденные лагранжианом (30), в переменных q, χ будут

$$[\mathcal{L}]_{q_i} = 0, [\mathcal{L}]_{\chi_\sigma} = 0, [\mathcal{L}]_{\lambda_s} = 0,$$

причем $\mathcal{L} = L^* + \Sigma \lambda_s \chi_s$. Более подробно

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n = 3N - r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\chi}_\sigma} - \frac{\partial L^*}{\partial \chi_\sigma} = \lambda_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, r, \\ \chi_s = 0, \quad s = 1, \dots, r; \end{array} \right.$$

последние уравнения позволяют нам подставить $\chi_s = \dot{\chi}_s = \ddot{\chi}_s = 0$ в первые n уравнений (следующие r нужны только для вычисления λ_s). Результат подстановки обозначим $()^0$. Согласно доказанному в начале параграфа, вместо того чтобы сначала продифференцировать по времени, а потом делать подстановку, можно поступить наоборот; совершить подстановку, а потом продифференцировать, т. е.

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right)^0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right)^0.$$

Далее, по определению частной производной все равно, когда совершать подстановку — до или после дифференцирования, т. е.

$$\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right)^* = \frac{\partial (L^*)^0}{\partial \dot{q}_i}, \quad \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i} \right)^0 = \frac{\partial (L^*)^0}{\partial q_i}.$$

Наконец, $(L^*)^0 = L$. Итак, первые n уравнений приобрели искомый вид (38). Впредь, конечно, черту над L опустим.

ЯВНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Сначала рассмотрим уравнения (25) в общем виде. Введем в рассмотрение набор функций

$$p_i(\dot{q}, q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (11.45)$$

Функция p_i называется каноническим или обобщенным импульсом, соответствующим координате q_i в системе переменных $(q_1, \dots, q_n)$. Вычислим ступенчатые производные явно:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial p}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Назовем лагранжиан регулярным, если

$$\det \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \quad (11.46)$$

(последняя матрица симметрична). В этом случае уравнения Лагранжа можно разрешить относительно старших производных:

$$\ddot{q} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \dots \right) = X(\dot{q}, q, t) \quad (11.47)$$

(выражение для ... запоминать не обязательно).

Центральная лемма. Если L — регулярный лагранжиан, то

$$\frac{d^x}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

(именно эта лемма позволяет не различать d/dt и d^x/dt в обозначениях). В самом деле,

$$\frac{d^x}{dt} p = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} X + \dots = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dots \right) + \dots = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Впредь лагранжианы считаются регулярными. **Всегда регулярны лагранжианы механических систем.** В самом деле, от скоростей $\dot{q}_i$ зависит только

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{d\bar{r}_v}{dt} \right)^2,$$

причем в силу (36) каждое слагаемое и вся сумма имеет вид квадратичного выражения по скоростям:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n a_i(q, t) \dot{q}_i + a(q, t). \quad (11.48)$$

Поскольку $T \geq 0$, $T=0 \Leftrightarrow \dot{r}_v=0$, матрица

$$\|a_{ij}\| = \left\| \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \quad (11.49)$$

положительно определена и потому невырождена.

Если связи не зависят явно от времени, то и определяющие координаты $q_1, \dots, q_n$ можно ввести независимым от времени образом: $r_v = \bar{r}_v(q)$; при $\bar{V} = \bar{V}(q)$ получается

классическая натуральная система

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q). \quad (11.50)$$

Тогда уравнения движения в форме Лагранжа суть

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k a_{ik} \dot{q}_k \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0,$$

или

$$\sum_k a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{j,k} \gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad (11.51)$$

В середине стоят выражения, строго квадратичные по $\dot{q}_k$. Решая относительно старших производных, имеем

$$\ddot{q}_i + \sum_{k,l} \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_k a^{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0,$$

где Γ_{kl}^i — некоторые функции переменных q . Их вид сейчас роли не играет, но их нетрудно вычислить:

$$\Gamma_{kl}^i = \sum_s a^{is} \left(-\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{ls}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l} \right).$$

Это в точности символы Кристоффеля для римановой метрики: $dS^2 = \Sigma a_{kl} dq_k dq_l$. Что касается коэффициентов a^{is} (индексы сверху), то они образуют матрицу, обратную к $\|a_{kl}\| = A$. Итак, в векторном виде уравнения движения суть

$$\ddot{q} + \Gamma(\dot{q}, q) + A^{-1} \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (11.52)$$

где $\Gamma(\dot{q}, q)$ строго квадратично зависит от $\dot{q}$. В частности, в случае одной степени свободы ($n=1$) имеем

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - V(q), \quad (11.53)$$

$$\frac{d}{dt} (a(q) \dot{q}) - \frac{1}{2} a'(q) \dot{q}^2 + V'(q) = 0,$$

$$a(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} a'(q) \dot{q}^2 + V'(q) = 0. \quad (11.54)$$

Реже встречаются обобщенно-натуральные системы:

$$L = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \Sigma f_i \dot{q}_i - V,$$

где a_{ij} , f_i , V зависят от q и совсем редко от времени. Уравнения пишутся аналогично (если t отсутствует, то достаточно в (51) дописать (22)). Забегая вперед, заметим, что появление линейных членов в лагранжиане может иметь причиной не только нестационарность связей (см. тему 14).

ОСНОВНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА

1. Если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ (тогда система (25) автономна), то имеется интеграл типа энергии:

$$H(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = h = \text{const}$$

(или интеграл Якоби, интеграл Пенлеве). В самом деле,

$$\frac{d^X}{dt} H = \underbrace{\sum_i \left(\frac{d^X}{dt} p_i \right) \dot{q}_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i p_i X_i}_{=0} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i}_{=0} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i}_{=0}.$$

Члены, подчеркнутые один раз, уничтожаются в силу (45), подчеркнутые дважды — в силу центральной леммы.

2. Если $\frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0$ (тогда координата q_k называется игнорируемой, или циклической, в системе переменных $q_1, \dots, q_n$), то имеет место **кинетенический интеграл**:

$$p_k(\dot{q}, q, t) = c = \text{const},$$

который называется также интегралом обобщенного импульса или циклическим интегралом. Действительно, в силу центральной леммы сразу

$$\frac{d^X}{dt} p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0.$$

В случае обобщенно-натуральных систем условия $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ или $\frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0$ равносильны тому, что все коэффициенты a_{ij} , f_i , V не зависят от соответствующей переменной. Следует обратить внимание на структуру интегралов в этом случае:

$$p_k = \sum_i a_{ki} \dot{q}_i + f_k \quad (11.55)$$

линеен по скоростям, а

$$\begin{aligned} H = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \dot{q}_j + f_i \right) \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \\ - \sum_i f_i \dot{q}_i + V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V \end{aligned} \quad (11.56)$$

квадратичен по скоростям, причем его выражение никак не зависит от линейных членов $\sum f_i \dot{q}_i$ в лагранжиане. Это важно само по себе, и, кроме того, объясняет, почему мы говорим интеграл «типа» энергии: если $L = \bar{T} - \bar{V}$ (39) содержит линейные члены или даже только слагаемое a из (48), то H не совпадает с полной энергией $T + V$ (на месте V в (56) имеем $\bar{V} - a$).

Тема 12

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Начнем с классической натуральной системы. Из ее уравнений движения (11.51) видно, что состояние равновесия

$$q(t) \equiv q_*,$$

возможно тогда и только тогда, когда (ср. с темой 5)

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_*} = 0. \quad (12.1)$$

Не уменьшая общности, можем считать $q_* = 0$.

Нас интересуют те движения, которые происходят вблизи состояния равновесия. Необходимый этап исследования близких к равновесию движений — это рассмотрение уравнений первого приближения. Вообще если есть система n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

то $x=0$ есть состояние равновесия тогда и только тогда, когда $f(0)=0$. Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = Cx + O(|x|^2), \quad C = \frac{\partial f}{\partial x}(0),$$

и отбросим члены порядка выше первого. Получим линейную систему

$$\dot{x} = Cx,$$

которая и называется первым приближением для системы $\dot{x} = f(x)$ в окрестности состояния равновесия $x=0$. Напомним, что свойства решений существенно зависят от распределения корней характеристического уравнения

$$\det(C - \lambda E) = 0.$$

Если все корни χ_i (вообще говоря, комплексные числа) различны и отличны от нуля, то общее решение первого приближения есть линейная комбинация частных решений вида:

$$e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad C \xi^{(i)} = \lambda_i \xi^{(i)}.$$

Перейдем к уравнениям Лагранжа.

Теорема. Пусть $q_*=0$, $\dot{q}=0$ — состояние равновесия классической натуральной системы. Тогда уравнения первого приближения порождаются лагранжианом

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} q_i q_j, \quad (12.2)$$

коэффициенты которого образуют матрицы

$$A = \|a_{ij}\| = \|a_{ij}(0)\|, \quad B = \|b_{ij}\| = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(0) \right\|. \quad (12.3)$$

Доказательство. Согласно (11.52), уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям первого порядка вида:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q},$$

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = -A^{-1}(q) \frac{\partial V}{\partial' q} - \Gamma(\dot{q}, q).$$

Нам надо линеаризовать их в окрестности состояния покоя $q=0$, $\dot{q}=0$. Верхние уравнения уже и так линейны, а нижние надо разложить в ряд Тейлора (сразу заметим, что слагаемые $\Gamma(\dot{q}, q) = O(\dot{q}^2)$):

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = -(A^{-1}(0) + O(q))(Bq + O(q^2)) + O(\dot{q}^2) = A^{-1}Bq + O(q^2 + \dot{q}^2).$$

Отсюда уравнения первого приближения суть

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = -A^{-1}Bq.$$

Возвращаясь к уравнениям второго порядка, имеем

$$A\ddot{q} + Bq = 0, \quad (12.4)$$

что и требовалось. Отметим дополнительно, что L_0 получается из лагранжиана L разложением его в ряд Тейлора по $\dot{q}$, q и отбрасыванием членов порядка выше второго.

Чтобы описать движения в первом приближении, нам потребуется вторая теорема об эквивалентности и

факт из линейной алгебры:

если имеются две квадратичные формы

$$\varphi = \sum a_{ij}x_i x_j, \quad \psi = \sum b_{ij}x_i x_j,$$

причем первая из них положительно определена, то существует невырожденная замена переменных

$$x = S\xi \quad (x_i = \sum_{\alpha} S_{i\alpha}\xi_{\alpha}),$$

такая, что после подстановки

$$\varphi = \sum \xi_{\alpha}^2, \quad \psi = \sum \Lambda_{\alpha}\xi_{\alpha}^2.$$

При этом Λ_i — корни уравнения $\det(\Lambda A - B) = 0$.

Применим это преобразование к лагранжиану L_0 и положим $q = S\xi$, тогда $\dot{q} = S\dot{\xi}$, так что

$$L^* = \frac{1}{2} \sum \dot{\xi}_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \sum \Lambda_{\alpha}\xi_{\alpha}^2, \quad (12.5)$$

а система уравнений первого приближения приняла вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \Lambda_1 \xi_1 &= 0, \\ \ddot{\xi}_n + \Lambda_n \xi_n &= 0. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Ее частные решения имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = \dots = \xi_{k-1} = \xi_{k+1} = \dots = \xi_n \equiv 0, \\ \xi_k &= \begin{cases} e^{\sqrt{\Lambda_k} t} \text{ или } e^{-\sqrt{\Lambda_k} t}, & \Lambda_k > 0, \\ 1 \text{ или } t, & \Lambda_k = 0, \\ \cos \sqrt{-\Lambda_k} t \text{ или } \sin \sqrt{-\Lambda_k} t, & \Lambda_k < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.7)$$

Свойства линеаризованной системы полностью определяются характером частных решений. Например, устойчивость ее (т. е. ограниченность всех решений) гарантируется условием $\Lambda_k < 0$, когда все собственные числа $\pm i\sqrt{-\Lambda_k}$ получаются чисто мнимыми (тогда V имеет минимум в точке 0). В переменных q в этом случае возможны **нормальные колебания**:

$$q^{(k)}(t) = (c'_k \cos \omega_k t + c''_k \sin \omega_k t) \rho^{(k)}, \quad \omega_k = \sqrt{-\Lambda_k}, \quad (12.8)$$

где $\rho^{(k)}$ собственный вектор матрицы $-\omega_k^2 A + B$:

$$(-\omega_k^2 A + B) \rho^{(k)} = 0. \quad (12.9)$$

Переменные ξ_k называются нормальными координатами.

Из теорем о первом приближении вытекает, что при $\Lambda_k \neq 0$ уравнения (4) в ряде вопросов дают неплохое представление о поведении решений точной системы. Особенно важна роль этого приема на практике, где ценность всякого приближения усиливается тем, что фактически важно поведение решений лишь на каком-то конечном интервале времени.

Линеаризация в случае (автономных) обобщенно-натуральных систем сложнее. К уравнениям (11.51) добавляются члены

$$\sum_{i,k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i.$$

Состояние равновесия по-прежнему имеем при условии $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$, а уравнения первого приближения получают вид

$$A\ddot{q} + C\dot{q} + Bq = 0,$$

где

$$C = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right\|_{q=0}.$$

Хотя достаточные условия устойчивости можно принять те же самые: корни характеристического уравнения

$$\det(A\lambda^2 + C\lambda + B) = 0,$$

должны быть ненулевыми и числа мнимыми:

$$\lambda = \pm i\omega, \quad \omega = \omega_1, \dots, \omega_n,$$

соответствующие семейства частных решений будут

$$q(t) = (c' \cos \omega t + c'' \sin \omega t) \rho + (-c' \sin \omega t + c'' \cos \omega t) \sigma,$$

где векторы σ и ρ удовлетворяют системе

$$(-A\omega^2 + B)\rho - C\omega\sigma = 0, \quad C\omega\rho + (-A\omega^2 + B)\sigma = 0$$

(для доказательства искать частные решения в виде $e^{\lambda t}(\rho + i\sigma)$ и учесть, что $\lambda = \pm i\omega$).

Таким образом, в общем случае будем иметь не колебания (8) вдоль вектора ρ , а движение по замкнутым кривым в плоскости

векторов ρ и σ , как у особой точки типа «центр». Подчеркнем: речь идет только о некоторых частных решениях; в той же плоскости векторов ρ и σ вполне возможны совсем другие решения (положим, например, $n=2!$). В пространстве переменных q получается до n таких плоскостей, которые, конечно, будут пересекаться (у эквивалентной системы первого порядка в пространстве q , $\dot{q}$ имеются инвариантные плоскости, которые, конечно, не пересекаются; пересечения возникают после проектирования их в пространство q).

Тема 13

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим систему с лагранжианом $L(\dot{q}, q, t)$. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}(q, t)$ зафиксируем произвольно две точки:

$$A = (a_1, \dots, a_n, t_A), \quad B = (b_1, \dots, b_n, t_B), \quad t_A < t_B.$$

Будем говорить, что кривая $q(t)$ соединяет их, если

$$q(t_A) = a, \quad q(t_B) = b.$$

Действием вдоль такой кривой называется величина

$$W[q(t)] = \int_{t_A}^{t_B} L(\dot{q}(t), q(t), t) dt. \quad (13.1)$$

Квадратные скобки призваны подчеркнуть, что имеем функционал — **функционал действия**, а не сложную функцию t .

Вариацией кривой $q(t)$, соединяющей точки A, B , называется гладкое семейство кривых $q(\alpha, t)$, где $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$, $t \in [t_A, t_B]$, такое, что $q(0, t) \equiv q(t)$ (рис. 58, а). Нам будет удобно писать $\frac{d}{dt} q(\alpha, t)$ вместо $\frac{\partial}{\partial t} q(\alpha, t)$ (поскольку это — скорость) и $\frac{\delta}{\delta \alpha} q(\alpha, t)$ вместо $\frac{\partial}{\partial \alpha} q(\alpha, t)$ (для контраста и по традиции).

Пусть вариация произвольно зафиксирована. Тогда имеем гладкую функцию

$$w(\alpha) = W[q(\alpha, t)] = \int_{t_A}^{t_B} l(\alpha, t) dt = \int_{t_A}^{t_B} L\left(\frac{dq(\alpha)}{dt}, q(\alpha, t), t\right) dt. \quad (13.2)$$

Вариацией действия при заданной вариации кривой $q(t)$ называется число $\left. \frac{\delta w}{\delta \alpha} \right|_{\alpha=0}$ (всюду далее $\frac{\delta}{\delta \alpha} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$):

$$\frac{\delta w}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\delta l}{\delta \alpha} dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\delta}{\delta \alpha} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} + \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \right] dt = \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\delta q}{\delta \alpha} \Big|_{t_A}^{t_B}.
\end{aligned}$$

Итоговая формула для вариации действия

$$\frac{\delta w}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_{q(t)} \cdot \delta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta(t) \Big|_{t_A}^{t_B}, \quad (13.3)$$

где

$$\delta(t) = \frac{\delta q(\alpha, t)}{\delta \alpha}. \quad (13.4)$$

Для любой вектор-функции $\delta(t)$ существует вариация такая, что выполнено (4). В самом деле, достаточно положить

$$q(\alpha, t) = q(t) + \alpha \delta(t).$$

Говорят про вариацию с закрепленными концами (рис. 58, б), если

$$q(\alpha, t_A) \equiv a, \quad q(\alpha, t_B) \equiv b. \quad (13.5)$$

В этом случае $\delta(t_A) = \delta(t_B) = 0$.

Теорема.

Функция $q(t)$, соединяющая точки $A, B \in \mathbb{R}^{n+1}$, является решением уравнения Эйлера—Лагранжа с функцией $L(\dot{q}, q, t)$ тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала действия на пространстве кривых, соединяющих точки A и B , т. е. для любой ее вариации с закрепленными концами соответствующая вариация функционала равна нулю.

Доказательство. Приравняем вариацию (3) к нулю, не забыв про (5). Условие экстремальности

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \delta(t) = 0, \quad (13.6)$$

для каждой функции $\delta(t)$, равной нулю при $t = t_A, t_B$. Положим

$$\Lambda(t) = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_{q(t)}.$$

Если $\Lambda(t) \equiv 0$, то (6) выполнено. Если $\Lambda(t) \not\equiv 0$, то пусть

$$\delta(t) = (t - t_A)(t_B - t)\Lambda(t).$$

Тогда интеграл (6) принимает вид

$$\int_{t_A}^{t_B} (t - t_A)(t_B - t) \Lambda^2(t) dt > 0,$$

т. е. (6) не выполнено.

СНОВА ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В теме 11 были доказаны следующие утверждения.

1. Если вместо лагранжиана L взять лагранжиан $\tilde{L} = cL + d\dot{f}(q, t)/dt$, то полученные уравнения эквивалентны исходным.

2. Пусть имеется замена переменных

$$q = q^*(\xi, t), \quad \dot{q}^* = \frac{\partial q^*}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial q^*}{\partial t},$$

и новый лагранжиан $L^*(\xi, \dot{\xi}, t) = L(\dot{q}^*(\xi, \dot{\xi}, t), q^*(\xi, t), t)$. Тогда соответствующие уравнения Лагранжа эквивалентны исходным.

Второе доказательство 1: $\tilde{W}[q(t)] = cW[q(t)] + f(B) - f(A)$, так что экстремали у обоих функционалов одни и те же.

Второе доказательство 2: Рассмотрим соответствие $\xi(t) \leftrightarrow q(t) = q^*(\xi(t), t)$; тогда $W^*[\xi(t)] = W[q(t)]$, так что и экстремали переходят в экстремали.

ВАРЬИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ

Пусть наряду с лагранжианом $L(\dot{q}, q, t)$ заданы связи

$$f_k(q, t) = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad (13.7)$$

причем $f(A) = f(B)$. Все кривые, соединяющие A и B , должны удовлетворять условию

$$f_k(q(t), t) = 0. \quad (13.8)$$

Это же условие войдет и в определение вариации: $f_k(q(\alpha, t), t) \equiv 0$. Если концы закреплены, то соответствующая вариация функционала действия W имеет вид

$$\frac{\delta W}{\delta \alpha} = \int_{t_A}^{t_B} \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \right) \cdot \delta(t) dt, \quad (13.9)$$

причем для $k = 1, \dots, r$

$$\frac{\partial f_k}{\partial q} \cdot \delta(t) \equiv 0. \quad (13.10)$$

Если $\delta(t)$ удовлетворяет условиям (10), то существует вариация, удовлетворяющая связям, такая, что справедливо (4). Это следует из леммы о трансверсальных координатах ((11.40)–(11.41)).

Теорема. Кривая $q(t)$, удовлетворяющая условию (8), является экстремалью функционала действия с закрепленными концами при наличии связей (1) тогда и только тогда, когда существуют

функции $\lambda_k(t)$ (зависящие от $q(t)$) такие, что $q(t)$ есть экстремаль функционала

$$W = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt = \int_{t_A}^{t_B} (L - \sum_k \lambda_k(t) f_k) dt,$$

рассматриваемого уже без связей. Эквивалентное условие: $q(t)$ есть решение уравнений Лагранжа, порожденных функцией $\mathcal{L}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i},$$

т. е. таких же, какие мы раньше писали для движений со связями. Таким образом, функции $\lambda_k(t)$ можно рассматривать как неопределенные множители Лагранжа для отыскания экстремалей при наличии связей (сравнить с методом Лагранжа отыскания условного экстремума функций).

Доказательство. Введем вектор-функцию

$$n_k(t) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial' q} \right) \Big|_{q(t)}. \quad (13.11)$$

Существуют функции $\lambda_k(t)$ такие, что

$$\Lambda(t) - \sum_k \lambda_k(t) n_k(t) \quad (13.12)$$

удовлетворяет условиям (10). В самом деле, формальные скалярные произведения (12) с (11) должны иметь вид

$$\Lambda \cdot n_l = \sum_k \lambda_k n_k \cdot n_l. \quad (13.13)$$

Матрица $\|n_k \cdot n_l\|$ невырождена, так как n_k линейно независимы, и потому λ_k можно выразить из (13). Тогда для вариации

$$\delta(t) = (t - t_A)(t_B - t)(\Lambda(t) - \sum \lambda_k(t) n_k(t)) \quad (13.14)$$

имеем (подчеркнутое слагаемое равно нулю)

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta \alpha} &= \int_{t_A}^{t_B} \Lambda(t) \cdot \delta(t) dt - \int_{t_A}^{t_B} \sum \lambda_k(t) n_k(t) \cdot \delta(t) dt = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} (t - t_A)(t_B - t)(\Lambda(t) - \sum \lambda_k(t) n_k(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Вариации обоих функционалов совпадают при условии (10) и положительны для (14), если (12) $\neq 0$. Остальное просто.

СИММЕТРИЯ

Говорят, что система с лагранжианом L допускает симметрию,

если имеется зависящая от параметра s замена переменных $q = q^*(s, \xi, t)$ такая, что

1) параметр s существен в том смысле, что формулы замены явно от него зависят: $\partial q^*/\partial s \neq 0$;

2) преобразованный лагранжиан не зависит от s :

$$L_s^*(\dot{\xi}, \xi, t) \equiv L_0^*(\dot{\xi}, \xi, t).$$

Теорема Ли—Нетер. Если система с лагранжианом L допускает симметрию, то имеется первый интеграл

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s}. \quad (13.15)$$

Пример 1. Пусть $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$, а замена переменных есть поворот осей:

$$x = \xi \cos s - \eta \sin s, \quad y = \xi \sin s + \eta \cos s.$$

тогда $L_s^* = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2)$, а первый интеграл

$$J = m\dot{x}(-\xi \sin s - \eta \cos s) + m\dot{y}(\xi \cos s - \eta \sin s) = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

совпадает с интегралом площадей. Можно было бы выразить $\dot{x}$, $\dot{y}$ через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$. Тогда $J = m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})$.

Пример 2. Если имеется игнорируемая (циклическая) переменная q_n , то положим $q_i = \xi_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $q_n = \xi_n + s$. Соответствующий интеграл

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{dq_n}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

совпадает с кинестеническим (циклическим). (Кстати, справедливо и обратное утверждение: интеграл (15) можно представить как кинестенический в некоторой системе координат.)

Доказательство теоремы. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнений Лагранжа с лагранжианом L_0^* . Тогда при каждом s функция $q(s, t) = q^*(s, \xi(t), t)$ будет решением уравнений Лагранжа с функцией $L(\dot{q}, q, t)$, и при этом действие $w(s) = W[q(s, t)] = W^*[\xi(t)]$ не зависит от s . Дифференцируя W по s , имеем по формуле (3)

$$\frac{\delta w}{\delta s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial s} \Big|_{t_A}^{t_B} = 0, \quad \frac{\delta q}{\delta s} = \frac{\partial q}{\partial s},$$

так что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial s} \Big|_{t_B} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial s} \Big|_{t_A},$$

а это означает, что J — первый интеграл.

Общая концепция, связывающая наличие интеграла с определенными свойствами симметрии системы, принадлежит С. Ли (мы дадим представление о ней в теме 17), а конкретный вид интеграла для систем, описываемых уравнениями типа Эйлера—Лагранжа и обладающих известной симметрией, получен Э. Нетер.

Обычно от преобразований $q = q^*(\xi, s, t)$ требуют (иногда по традиции, иногда с дальним прицелом) выполнения групповых свойств:

а) при $s=0$ получается $q = \xi$;

б) хотя бы локально $q^*(s_2, q^*(s_1, \xi)) = q^*(s_1 + s_2, \xi)$. В этом случае интеграл J не зависит от s , и дифференцировать по s достаточно только при $s=0$. Привлекательные черты такого положения вещей очевидны, но сам факт существования интеграла справедлив без предположения о групповом свойстве. Можно представить себе замены, при разных $s=s_1, s_2$ дающие независимые интегралы J_1, J_2 .

Ясно, что теорема Ли—Нетер верна и при наличии связей: дополнительно надо потребовать, чтобы f_k^* не зависели от s . Таким образом, наличие симметрии можно устанавливать, не вводя определяющих координат.

Тема 14

ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Наша цель — приблизить к формализму Лагранжа механические модели с непотенциальными силами. Введем в рассмотрение

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.1)$$

Пока что от $T(\dot{q}, q, t)$ требуется лишь, чтобы

$$\det \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} \neq 0.$$

Функции $Q_i(\dot{q}, q, t)$ называются обобщенными силами. Смысл термина скоро станет яснее, а пока что проведем формальный анализ. Если имеется замена переменных

$$q = q^*(\xi, t), \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial q}{\partial t},$$

то преобразованным в силу нее уравнениям (1) можно снова придать вид универсальных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_\alpha} = \Xi_\alpha(\dot{\xi}, \xi, t), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (14.2)$$

Докажем это. Левые части уравнений (1) преобразуются по ко-

векторному правилу (это мы уже знаем):

$$[T^*]_{\xi_\alpha} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} [T]_{q_i}.$$

Чтобы этому последовали также правые части, введем в рассмотрение (в принципе зависящую от времени t) дифференциальную форму на пространстве $\dot{q}, q$ вида

$$\beta = \sum_i Q_i(\dot{q}, q, t) \delta q_i. \quad (14.3)$$

Здесь написано δq_i вместо обычных dq_i потому, что $\dot{q}_i = dq_i/dt$, так что символ dq_i уже занят. Кроме того, сейчас мы считаем q_i и $\dot{q}_i$ независимыми переменными, и потому дифференциалы δq_i и $\delta \dot{q}_i$ также независимы (как δx и δy на плоскости). Последние, т. е. $\delta \dot{q}_i$, в выражении β не участвуют, так что мы имеем форму отнюдь не самого общего вида. Формы такого вида называются базовыми. Отметим также, что время t , фигурирующее в выражении β , рассматривается как параметр, который хотя произвольно, но фиксируется. Если есть замена переменных, то

$$\delta q_i = \sum_\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha \quad (14.4)$$

(по t дифференцирования нет, так как время, повторяем, произвольно фиксируется). Выражение вида (4) называют изохронным дифференциалом функции $q_i^*(\xi, t)$.

Лемма. Коэффициенты базовой формы при подстановке изохронных дифференциалов формул замены переменных преобразуются по ковекторному правилу.

Это утверждение тривиально по форме:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_i Q_i \delta q_i = \sum_{i, \alpha} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha = \sum_\alpha \Xi_\alpha \delta \xi_\alpha \rightarrow \\ &\rightarrow \Xi_\alpha = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\alpha} Q_i, \end{aligned} \quad (14.5)$$

однако важно по сути. Чтобы получить правые части преобразованных уравнений (получать левые из преобразованной функции T мы уже умеем), надо составить базовую форму β , подставить в нее формулы замены и их изохронные дифференциалы и собрать коэффициенты при $\delta \xi_\alpha$. Они и будут искомыми функциями Ξ_α . Такое правило легче запомнить, нежели (5).

Итак, уравнения (2) получены, причем даже указан способ вычисления правых частей.

Примером универсальных уравнений Лагранжа являются и уравнения Ньютона для системы свободных точек:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

и система уравнений при наличии связей: вместо T надо взять

$$\mathcal{T} = T + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k$$

и проделать те же выкладки, что и после (11.30), оставляя F_i в правых частях в роли обобщенных сил. Переход к локальным координатам на многообразии положений опишем с несколько более общих позиций, которые уже выработались у нас при изложении вариационных принципов.

Теорема. Пусть имеется система уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \\ f_k(q, t) = 0, \quad k = 1, \dots, r \end{cases} \quad (14.6)$$

и $\xi_1, \dots, \xi_m$ — локальные координаты на многообразии $\mathfrak{M} = \{f_k = 0\}$, так что $q = q^*(\xi, t)$. Тогда решения системы (6) находятся во взаимно-однозначном соответствии с решениями $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$ системы универсальных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_\alpha} = \Xi_\alpha,$$

причем справедливо тождество

$$\sum_\alpha \Xi_\alpha \delta \xi_\alpha = \sum_i Q_i \delta q_i \quad (14.7)$$

после подстановки формул $q = q^*(\xi, t)$ и их изохронных дифференциалов в правую часть этого равенства.

Доказательство повторяет рассуждения соответствующей теоремы из темы 11 с учетом ковекторного правила преобразования обобщенных сил, описанного только что выше (в нем не использовалась невырожденность замены).

Будем говорить, что обобщенные силы Q_i допускают

ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ,

если имеют место тождества (не путать с уравнениями движения!)

$$Q_i \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} = [W]_{q_i}, \quad (14.8)$$

где $W = W(\dot{q}, q, t)$, т. е. обобщенные силы являются ступенчатыми производными одной и той же функции. Ясно, что в этом случае универсальные уравнения Лагранжа принимают вид обычных уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad L = T - W. \quad (14.9)$$

Силы Q_i не зависят от ускорений $\ddot{q}_i$. Поэтому частные производные $\partial W / \partial \dot{q}_i$ — те, что подвергаются взятию полной производной

по времени, — не должны зависеть от $\dot{q}$. Отсюда

$$W = W_0(q, t) + \sum_i W_i(q, t) \dot{q}_i.$$

В частности, силы называются просто потенциальными, когда

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad V = V(q, t). \quad (14.10)$$

Заметим, что в силу ковекторного правила преобразования свойство обобщенной потенциальности (простой потенциальности) не зависит от выбора переменных и сохраняется после наложения связей. Обобщенный потенциал определен с точностью до прибавления полной производной $df(q, t)/dt$ и выдерживает любые замены переменных.

Пример 1. Сила Лоренца, действующая на заряд в электромагнитном поле, обобщенно потенциальна. Более подробно,

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right),$$

где напряженность электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и индукция магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ в силу уравнений Максвелла даются формулами:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — скалярный и векторный потенциалы. Покажем, что обобщенный потенциал силы Лоренца имеет вид

$$W = q \left[\varphi - \frac{1}{c} (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \right] = q\varphi(x, y, z, t) - (q/c) (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \quad (14.11)$$

В самом деле, ее первая компонента

$$X = qE_x + \frac{q}{c} (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = q \left[- \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(- \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \dot{y} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \dot{z} \right].$$

Осталось сравнить с (11.21) и (11.22).

В частности, для $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z = \text{const}$

$$W = - \frac{qB}{2c} (xy - yx) = - \frac{qB}{2c} r^2 \dot{\varphi}. \quad (14.12)$$

Впрочем, в качестве обобщенного потенциала можно взять также

$$W = \frac{qB}{c} \dot{x}y. \quad (14.13)$$

Эти варианты отличаются на $\frac{d}{dt}(xy)$ с множителем.

Пример 2. Силы инерции, действующие на точку в неинерциальной системе координат, обобщенно потенциальны.

Для доказательства рассмотрим лагранжиан свободной материальной точки в неподвижной системе $Oxyz$ и перепишем его в подвижной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$:

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}] + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} \right)^2 = \\ = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} \right)^2 + \frac{m}{2} (\mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}])^2 + m \left(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}], \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} \right).$$

Последние два слагаемых, взятые с обратным знаком, дадут обобщенный потенциал сил инерции. Если в неинерциальной системе координат движутся несколько точек, то обобщенные потенциалы сил инерции, естественно, суммируются.

Тема 15

ТЕХНИКА УПРАЖНЕНИЙ

В учебных задачах, как правило, встречаются не материальные точки, а твердые тела. В этом случае при вычислении импульса, кинетического момента или кинетической энергии тела надо исходить из того, что пространственное твердое тело характеризуется массой M , положением центра масс S , тремя главными центральными направлениями $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ и соответствующими главными центральными моментами инерции A , B , C . Пусть в некоторой «неподвижной» системе координат $Oxyz$ точка S имеет радиус-вектор $\mathbf{s} = \overline{OS}$, и пусть угловая скорость тела относительно $Oxyz$ разложена по (правому) главному реперу:

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e} + q\mathbf{e}' + r\mathbf{e}''.$$

Тогда

импульс $\mathbf{P} = M\mathbf{s}$,

собственный кинетический момент $\mathbf{\Lambda}_S = A p\mathbf{e} + B q\mathbf{e}' + C r\mathbf{e}''$,

полный кинетический момент $\mathbf{\Lambda}_O = M[\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}] + \mathbf{\Lambda}_S$,

кинетическая энергия

$$T = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Динамические уравнения движения твердого тела имеют вид

$$M\ddot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\Phi}, \quad (15.1)$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ — формальная сумма всех сил, действующих на тело, и

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}_S}{dt} = \mathbf{G}_S, \quad (15.2)$$

где $\mathbf{G}_S$ — момент сил относительно центра масс. Из этих уравнений следует, что

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = (\boldsymbol{\Phi}, \dot{\mathbf{s}}) + (\mathbf{G}_S, \boldsymbol{\omega}). \quad (15.3)$$

В случае плоских движений (пусть в плоскости Oxy) вводится абсолютный угол φ поворота твердого тела от некоторого неподвижного направления; угол φ отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть навстречу вектору e_z . Тогда

$$\omega = \dot{\varphi} e_z, \quad \Lambda_S = I \dot{\varphi} e_z, \quad T = \frac{M \dot{s}^2}{2} + \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Величина $I = C$ для обруча радиуса a , диска радиуса a и палочки длины $2a$ равна соответственно

$$Ma^2, \quad \frac{Ma^2}{2}, \quad \frac{Ma^2}{3}. \quad (15.4)$$

Разумеется, все они предполагаются однородными.

УДОБНЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПОДВИЖНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При решении задач со сложной кинематикой полезно принимать подвижные системы координат $A\xi\eta\zeta$ с целью получить компактные разложения тех или иных векторных величин: скоростей и ускорений отдельных точек системы, угловых ускорений и скоростей тела, кинетических моментов, сил и моментов сил (укажем, например, на применение осей Кенига или подвижного репера главных направлений твердого тела с неподвижной точкой). Полезно сделать выбор подвижной системы координат осознанно, другими словами, применять такую методику обращения с чертежом, которая как бы сама собой приводила бы к удобной системе координат, т. е. учитывала бы взаимное разложение частей механической системы, ее характерные черты свойства симметрии и т. д.

Принцип явно важных точек.

Подвижную систему координат надо вводить таким образом, чтобы в ней

*точки соприкосновения тел,
центры масс (геометрические центры) тел,
точки приложения сил*

имели возможно более простые траектории. При этом желательно, чтобы оси двигались также по возможности просто.

Проиллюстрируем этот подход на ряде конкретных задач.

Задача 1. Шар радиуса r катится по дну и стенке круглого цилиндрического стакана радиуса $\rho + r$. Скорость его центра постоянна и по модулю равна v . Определить ускорение верхней точки шара N (рис. 35).

Явно важные точки здесь — это центр шара S и места соприкосновения с дном и стенкой стакана P и Q . Эти точки будут неподвижны в системе координат $A\xi\eta\zeta$, вращающейся вокруг оси $A\zeta$, совпадающей с осью цилиндра, причем расположение их получится особенно простым, если мы начало A поместим на дне стакана, а ось $A\xi$ направим в точку P . Тогда скорость центра шара

$$v_S = v e_n, \quad (15.5)$$

угловая скорость системы координат

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_\zeta.$$

Мгновенная ось вращения шара проходит через точки P и Q , которые мгновенно-неподвижны. Следовательно, абсолютная угловая скорость шара

$$\Omega = \Omega \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\zeta - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\xi \right).$$

Скорость центра вычислим еще одним способом:

$$\mathbf{v}_S = [\Omega \times \overline{PS}] = \frac{\Omega r}{\sqrt{2}} [(-\mathbf{e}_\zeta - \mathbf{e}_\xi) \times \mathbf{e}_\zeta] = \frac{\Omega r}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\eta.$$

Сопоставив с (5), получаем

$$\Omega = \frac{\sqrt{2} v}{r}.$$

Угловое ускорение шара

$$\varepsilon = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\Omega}{\sqrt{2}} [\omega_{\text{пер}} \times \mathbf{e}_\xi] = -\frac{v^2}{r\rho} \mathbf{e}_\eta.$$

Ускорение центра

$$\mathbf{a}_S = -\frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_\xi.$$

Ускорение верхней точки определяем по формуле Ривальса:

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_S + [\varepsilon \times \overline{SN}] + [\Omega \times [\Omega \times \overline{SN}]],$$

в которой $\overline{SN} = r\mathbf{e}_\zeta$. Получим ответ:

$$\mathbf{a}_N = -v^2 \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_\xi - \frac{v^2}{r} \mathbf{e}_\zeta.$$

Использование подвижного репера оказалось целесообразным несмотря на то, что формулами сложения скоростей или ускорений мы не пользовались ни разу.

Задача 2. Однородный брусок сечением $2l \times 2h$ лежит на неподвижном бревне радиуса r вдоль верхней образующей. При каком условии это равновесие будет устойчиво?

Изобразим брусок в отклоненном положении (рис. 36). Угол отклонения обозначим φ . Мы должны получить условие того, что потенциальная энергия $V(\varphi)$ имеет минимум в точке $\varphi = 0$. Для вычисления потенциальной энергии введем подвижную систему координат. Явно важными точками (в сечении) являются центр бруска S , точка P соприкосновения его с бревном и центр окружности O . Поместим начало A в точку O , а ось $O\eta$ направим в точку P . Тогда точки O и P в системе $O\xi\eta\zeta$ неподвижны, а точка S движется параллельно оси $O\xi$, направленной вправо—вверх.

В этой системе координат брусок движется вправо, а бревно вращается по часовой стрелке. Оба тела соприкасаются в точке P , причем относительного проскальзывания нет. Приравнивая скорости соприкасающихся точек, имеем

$$\dot{s}\mathbf{e}_\xi = r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\xi,$$

откуда с учетом условия задачи расстояние от S до $O\eta$

$$s = r\varphi$$

(хотелось бы настоять на том, что получение связей такого сорта — когда есть качество — должно вестись из кинематических соображений: приравнивание дуги отрезку, вполне очевидное в этой задаче, в более сложных случаях, как показывает опыт, неизбежно ведет к ошибкам). Теперь

$$\begin{aligned} V &= mg(\overline{OS}, \mathbf{e}_y) = mg((r+h)\mathbf{e}_\eta + s\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_y) = \\ &= (r+h)\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд Тейлора с точностью до членов третьего порядка малости, имеем

$$V = (r+h)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + r\varphi^2 = \text{const} + (r-h)\frac{\varphi^2}{2}.$$

Вывод: должно быть $r > h$. При противоположном знаке неравенства будем иметь неустойчивость в первом приближении.

Задача 3. В вертикальной плоскости движется однородный обруч, на который намотана невесомая нить; конец ее закреплен на потолке. Обруч зафиксировали так, что нить натянута вертикально, и отпустили. Определить, будет ли нить отклоняться от вертикали в последующем движении.

Положение системы в плоскости можно задать двумя определяющими координатами: длиной смотавшейся нити s и углом α отклонения ее от вертикали. Для вычисления кинетической и потенциальной энергии системы применим подвижную систему координат. Явно важными точками являются: центр обруча S , точка касания P нити с обручем, точка A закрепления нити. Отметим эти точки на чертеже (рис. 37). Если мы оси направим по PS , PA , то в полученной системе координат все точки будут неподвижны. Однако движение самой системы не очень просто: и начало движется, и оси вращаются. Выберем такую, у которой начало неподвижно. Для этого поместим начало в точке A , а ось $A\xi$ направим по AP . В этой системе координат точка A неподвижна, а точки P и S движутся по оси $A\xi$ и по параллельной прямой соответственно. Конечно, это — простые траектории. Ось $A\eta$ направим вправо — вверх. Угловая скорость системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \alpha\mathbf{e}_\zeta, \quad (15.6)$$

где $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_z$ — вектор, ортогональный плоскости движения.

Вычислим скорость центра обруча, разложив ее на относитель-

ную и переносную. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{отн}} &= \dot{s}\mathbf{e}_s, \\ \mathbf{v}_{\text{пер}} &= [\dot{\alpha}\mathbf{e}_\tau \times \overline{AS}] = [\dot{\alpha}\mathbf{e}_\tau \times (s\mathbf{e}_s + r\mathbf{e}_\eta)] = \\ &= \dot{\alpha}s[\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_s] + \dot{\alpha}r[\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_\eta] = -r\dot{\alpha}\mathbf{e}_s + s\dot{\alpha}\mathbf{e}_\eta.\end{aligned}\quad (15.7)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = (\dot{s} - r\dot{\alpha})\mathbf{e}_s + s\dot{\alpha}\mathbf{e}_\eta.$$

Пусть теперь φ — угол поворота обруча в неподвижной плоскости. Тогда его абсолютная угловая скорость

$$\Omega_{\text{абс}} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\tau.$$

Поскольку угловая скорость системы координат уже вычислена (6), то относительная угловая скорость обруча

$$\Omega_{\text{отн}} = \Omega_{\text{абс}} - \omega_{\text{отн}} = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\mathbf{e}_\tau.$$

В подвижной системе координат обруч катится по оси $O\xi$. Отсюда относительная скорость его центра

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = [\Omega_{\text{отн}} \times \overline{PS}] = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})r[\mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_\eta],$$

и, сравнив с предшествующим вычислением (7), имеем связь

$$\dot{s} - r(-\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) = 0.$$

Следовательно, кинетическая энергия тела

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2} \mathbf{v}_{\text{абс}}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2} [(\dot{s} - r\dot{\alpha})^2 + s^2 \dot{\alpha}^2] + \\ &+ \frac{m}{2} (\dot{s} - r\dot{\alpha})^2 = \frac{m}{2} (2\dot{s}^2 - 4rs\dot{\alpha} + (2r^2 + s^2)\dot{\alpha}^2).\end{aligned}$$

Потенциальная энергия равна

$$mg(\mathbf{e}_y, \overline{AS}) = mg(\mathbf{e}_y, s\mathbf{e}_s + r\mathbf{e}_\eta) = -mg(s\cos\alpha - r\sin\alpha).$$

Уравнения Лагранжа будут:

$$\begin{aligned}2(\ddot{s} - r\ddot{\alpha}) - s\dot{\alpha}^2 - g\cos\alpha &= 0, \\ -2\ddot{s} + (s^2 + 2r^2)\ddot{\alpha} + 2s\dot{s}\dot{\alpha} + gs\sin\alpha + r\cos\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что они допускают частное решение, при котором

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad s(t) = s_0 + gt^2/4 \quad (\ddot{s} = g/2)$$

и, в частности, $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$. Опираясь на теорему о единственности решения, заключаем, что это и будет движение с заданными начальными условиями. Нить не отклоняется.

Задача 4. Однородный обруч радиуса r , массы M , на который намотана невесомая нить с точечной массой m на конце (рис. 38),

поставлен на шероховатую горизонтальную прямую с коэффициентом трения скольжения k (трение качения отсутствует), причем так, что нить висит вертикально. Покатится он или заскользит?

Пусть (x, y) — координаты центра обруча, φ — абсолютный угол его поворота, $F > 0$ — натяжение нити, (R_x, R_y) — реакция опоры в точке касания P . Качение возможно при

$$|R_x| \leq k |R_y|$$

и невозможно при противоположном знаке неравенства. Из уравнений движения свободного твердого тела (1)–(2) имеем при $\alpha = 0$

$$M\ddot{x} = R_x, \quad 0 = R_y - Mg - F,$$

$$Mr^2\ddot{\varphi} = r(R_x - F),$$

причем в случае качения (вычислить v_S двумя способами)

$$r\ddot{\varphi} + \ddot{x} = 0.$$

Следовательно,

$$F = 2R_x,$$

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{1}{2} \frac{F}{Mg + F} = \frac{\ddot{x}(0)}{g + 2\ddot{x}(0)} = - \frac{r\ddot{\varphi}(0)}{g - 2r\ddot{\varphi}(0)}.$$

Осталось найти $\ddot{\varphi}(0)$. Известно, что если лагранжиан

$$L = \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q),$$

то уравнения Лагранжа будут:

$$\sum a_{ij} \ddot{q}_j + \sum \gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

В частности, в состоянии мгновенного покоя системы ($\dot{q}_i^{(0)} = 0$)

$$A\ddot{q} = - \frac{\partial V}{\partial' q}, \quad (15.8)$$

где A — матрица коэффициентов кинетической энергии. Для решения задачи надо вычислить правую и левую части последнего равенства в нашей конкретной задаче.

За определяющие координаты системы при качении возьмем угол α отклонения нити от вертикали и абсолютный угол поворота обруча. Пусть также s — длина смотавшейся нити.

Для вычислений нам потребуются подвижная система координат. Явно важные точки здесь — центр обруча S , точка P соприкосновения с прямой, точка Q касания нити, точка m . Начало подвижной системы координат помещаем в S , а ось направляем по SQ . Тогда в этой системе координат точки S , Q неподвижны, точка P движется по окружности радиуса r , точка m движется по прямой, параллельной оси $O\xi$.

Угловая скорость системы координат

$$\omega_{\text{пер}} = \alpha \epsilon_z,$$

относительная угловая скорость обруча

$$\Omega_{\text{отн}} = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) \mathbf{e}_z.$$

Относительная скорость m вычисляется двумя способами:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{s} \mathbf{e}_s = -r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) \mathbf{e}_s,$$

откуда

$$\dot{s} = r(\dot{\alpha} - \dot{\varphi}), \quad s = r(\alpha - \varphi).$$

Константа интегрирования гасится произволом в выборе φ .

Потенциальная энергия

$$V = mg(\overline{Sm}, \mathbf{e}_y) = mgr(\sin \alpha + (\varphi - \alpha) \cos \alpha),$$

так что

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right|_{\alpha=0} = mgr, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Переносная скорость точки m равна

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{пер}} &= \mathbf{v}_S + [\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \overline{Sm}] = \\ &= (-r\dot{\varphi} \sin \alpha - r\dot{\alpha}) \mathbf{e}_s + (-r\dot{\varphi} \cos \alpha + \dot{s}) \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

наконец, абсолютная при $\alpha=0$

$$\mathbf{v}_{\text{абс}}|_{\alpha=0} = -r\dot{\varphi} \mathbf{e}_s + (r\dot{\varphi} + \dot{s}) \mathbf{e}_n.$$

Поэтому кинетическая энергия системы в положении $\alpha=0$

$$T = \frac{m}{2} (2r^2\dot{\varphi}^2 - 2sr\dot{\alpha}\dot{\varphi} + s^2\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} 2Mr^2\dot{\varphi}^2.$$

Уравнение (8) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 2(M+m)r^2 - msr \\ -msr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}(0) \\ \ddot{\alpha}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgr \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{-mgr \cdot ms^2}{2m(M+m)r^2s^2 - m^2s^2r^2} = -\frac{mg}{(2M+m)r},$$

так что условие качения получается таким:

$$\frac{m}{2M+3m} \leq k.$$

З а м е ч а н и е. Если просто тянуть обруч за нить с силой $F=mg$, то получим

$$\frac{m}{2M+2m} \leq k,$$

если же масса m жестко прикреплена к обручу и находится в крайнем положении, то

$$\frac{m^2 + Mm}{m^2 + M(2M+4m)} \leq k.$$

Задача 5. Внутри неподвижной вертикальной окружности радиуса $\rho + r$ катается однородный диск радиуса r массы M , по которому в свою очередь катается однородная палочка длины $2l$, массы m . Определить, при каких условиях будет устойчиво положение равновесия, в котором диск находится внизу, а палочка лежит на нем горизонтально. Определить частоты малых колебаний при $m \rightarrow 0$.

Явно важными точками являются центр неподвижной окружности O , центр диска A , точка касания диска и окружности B , центр палочки S , точка соприкосновения ее с диском P . Определяющие координаты надо выбрать из следующих переменных:

угол θ поворота радиуса-вектора OA ,

угол φ поворота диска,

угол ψ поворота палочки,

расстояние s между точками S и P .

Наиболее приемлемыми представляются θ, ψ . Для вычисления кинетической и потенциальной энергии необходимо, в частности, выразить s и φ через θ, ψ . Будем искать подвижную систему координат.

Отметим явно важные точки на чертеже (рис. 39). Если мы возьмем в качестве начала точку O , а ось пустим по OAB , то траектория точки S простой не получится. Придется примириться с тем, что и начало и оси системы движутся. Достаточно просто движется точка A — поместим начало в нее. Если мы теперь направим ось $O\xi$ в точку P , то точка B в полученной системе будет двигаться по окружности, а точка S — по прямой, параллельной оси $O\xi$.

Скорость начала системы $A\xi\eta$ по модулю

$$|\mathbf{v}_A| = \rho |\dot{\theta}|.$$

С другой стороны, поскольку в точке B находится мгновенный центр скоростей диска,

$$|\mathbf{v}_A| = r |\dot{\varphi}|,$$

откуда с учетом направления вращения имеем первую связь:

$$\rho \dot{\theta} + r \dot{\varphi} = 0. \quad (15.9)$$

Относительная угловая скорость диска

$$\omega_{отн} = (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \mathbf{e}_z.$$

Относительная скорость точки s имеет два выражения:

$$\mathbf{v}_{отн} = s \mathbf{e}_\xi = -r (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \mathbf{e}_\xi.$$

Учитывая (9), мы получим вторую связь — между $\dot{s}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$:

$$\dot{s} = -r \dot{\varphi} + r \dot{\psi} = \rho \dot{\theta} + r \dot{\psi} \quad (15.10)$$

и, наконец,

$$s = \rho \theta + r \psi.$$

Потенциальная энергия системы

$$V = Mg(\overline{OA}, \mathbf{e}_y) + mg(\overline{OS}, \mathbf{e}_y) = (Mg\overline{OA} + mg(\overline{OA} + \overline{AP} + \overline{PS}, \mathbf{e}_y)) = \\ = -Mg\rho \cos \theta + mg(-\rho \cos \theta + r \cos \psi + (\rho\theta + r\psi) \sin \psi).$$

Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = \psi = 0$. С точностью до членов третьего порядка малости

$$\frac{V}{g} = mr - (M + m)\rho + \frac{(M + m)}{2}\rho\theta^2 + m\rho\theta\psi + mr\frac{\psi^2}{2}.$$

Матрица вторых производных

$$B = g \begin{pmatrix} (M + m)\rho & m\rho \\ m\rho & mr \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы положительны. Для устойчивости достаточно, чтобы в точке $\theta = \psi = 0$ был строгий минимум функции V , т. е., в данном случае, чтобы определитель был положителен:

$$(m + M)m\rho r - m^2\rho^2 > 0.$$

В случае противоположного знака неравенства V имеет седловую точку, и равновесие неустойчиво в первом приближении. Итак, условие устойчивости имеет вид

$$r > \frac{m}{m + M}\rho.$$

Для вычисления частот малых колебаний надо вычислить матрицу A кинетической энергии в положении равновесия $\theta = \psi = 0$. В этом положении скорость начала системы координат

$$\mathbf{v}_A = \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\xi;$$

ее угловая скорость (она и всегда такая)

$$\omega_{\text{пер}} = \dot{\psi}\mathbf{e}_\xi,$$

переносная скорость точки S ,

$$\mathbf{v}_S^{\text{пер}} = \mathbf{v}_A + [\omega_{\text{пер}} \times \overline{AS}] = \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\xi + r\dot{\psi}[\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta] = (\rho\dot{\theta} - r\dot{\psi})\mathbf{e}_\xi,$$

относительная ее скорость (10)

$$\mathbf{v}_S^{\text{отн}} = \dot{s}\mathbf{e}_\xi = (\rho\dot{\theta} + r\dot{\psi})\mathbf{e}_\xi.$$

Таким образом, кинетическая энергия при $\psi = \theta = 0$

$$T = \frac{M}{2}\mathbf{v}_A^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{v}_S^2 + \frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2 = \\ = \frac{3}{4}M\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\left(4\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\psi}^2\right).$$

Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2} M + 4m\right) \rho^2 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение напомним при $M=g=\rho=1$:

$$\det(A\omega^2 - B) = 0 \Rightarrow ((3 + 8m)\omega^2 - 2(1 + m))(l^2\omega^2 - 3r) - 6m = 0.$$

Устремляя $m \rightarrow 0$, получим $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3r}{l^2}}$. В общем виде

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3\rho}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3gr}{l^2}}.$$

Это соответственно частота малых колебаний одного только диска без палочки и частота малых колебаний палочки на неподвижном диске. Результат физически очевидный.

Задача 6. Палочка длины $2l$ подвешена на двух вертикальных нитях длины a и b , прикрепленных на расстоянии к наклонной (под углом γ) прямой (рис. 40). Определить частоту плоских малых колебаний около этого состояния равновесия.

Явно важные точки в этой задаче — это концы и середина палочки и места закрепления нити. Простые траектории у этих точек будут только в системе координат, жестко связанной с палочкой, но это не облегчит нам описание кинематики палочки. Поэтому от применения подвижной системы координат откажемся.

Для решения задачи достаточно вычислить вторую производную потенциальной энергии:

$$V(\alpha) = -\frac{mg}{2}(a \cos \alpha + b \cos \beta)$$

в положении равновесия (с учетом связи между α и β) и кинетическую энергию палочки в положении (именно положении, а не состоянии) равновесия. Для этого заметим, что при $\alpha = \beta = 0$ скорости концов палочки горизонтальны и не ортогональны ей. Отсюда следует, что палочка движется мгновенно-поступательно, т. е. ее угловая скорость обращается в нуль (мгновенный центр скоростей уходит в бесконечность). Поэтому скорости концов равны между собой. Отсюда

$$a\dot{\alpha} = b\dot{\beta},$$

так что связь имеет вид

$$\beta = \frac{a}{b} \alpha + O(\alpha^2),$$

и потенциальная энергия получает разложение Тейлора

$$V = -\frac{mg}{2} \left(a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + b \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right) + \dots = \text{const} + \\ + \frac{mg}{2} \left(a + \frac{a^2}{b} \right) \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

Поскольку при $\alpha=0$ движение мгновенно-поступательное, горизонтальная скорость центра дает всю кинетическую энергию палочки:

$$T = \frac{1}{2} A(\alpha) \dot{\alpha}^2 \Big|_{\alpha=0} = \frac{m}{2} (a\dot{\alpha})^2 = \frac{ma^2}{2} \dot{\alpha}^2.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{A(0)}} = \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

От l и наклона γ ответ не зависит.

Заключение. Рассмотренные примеры показывают, что применение принципа явно важных точек (причем начинать надо буквально с того, что отметить эти точки на чертеже) может существенно облегчить преодоление чисто кинематических трудностей при решении задач, особенно плоских. В то же время нередко этот принцип приводит к системам координат, которые «и так очевидны» или бесполезны — такая констатация не опровергает используемую единую концепцию. Она, эта концепция, — не универсальный метод, гарантированно приводящий к оптимальному выбору подвижной системы координат, а неформальный прием обработки условия задачи, во многих случаях полезный для упрощения процесса решения.

В дополнение подчеркнем, что все векторные величины целесообразно записывать только в виде $\mathbf{a} = a_z \mathbf{e}_z + a_\eta \mathbf{e}_\eta + a_\tau \mathbf{e}_\tau$, чтобы при дифференцировании не забыть о том, что векторы $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\tau$ не постоянны, чтобы удобно было вычислять скалярные и особенно векторные произведения, вообще, чтобы слегка избыточной символикой поддерживать более прочную связь с наглядно-геометрическими образами.

МЕТОД КООРДИНАТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ СО СТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

То, что связи не зависят от времени, на практике означает, что при постановке задачи не указываются точки или тела, совершающие заранее предписанные движения. В этом случае определяющие координаты можно ввести так, что положения всех точек системы выражаются через них независимым от времени образом: $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_1, \dots, q_n)$; тогда скорости точек имеют выражения, линейные и однородные по определяющим скоростям:

$$\dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{v}_v^{(1)} + \mathbf{v}_v^{(2)} + \dots + \mathbf{v}_v^{(n)} = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_n} \dot{q}_n. \quad (15.11)$$

Импульс и кинетический момент системы в свою очередь линейно выражаются через $\dot{\mathbf{r}}_v$. Следовательно,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \dots + \mathbf{P}^{(n)}, \quad (15.12)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{(1)} + \dots + \mathbf{\Lambda}^{(n)}, \quad (15.13)$$

где

$$\mathbf{P}^{(i)} = f^{(i)}(q) \dot{q}_i, \quad \mathbf{\Lambda}^{(i)} = \varphi^{(i)}(q) \dot{q}_i \quad (15.14)$$

суть импульс и момент такого движения (лучше было бы сказать — «перемещения», так как действующие силы сейчас ни при чем), когда изменяется только i -я определяющая координата, а остальные постоянны.

Если в системе есть твердое тело, то скорость его центра масс и его угловая скорость также представляются в виде

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}^{(1)} + \dots + \dot{\mathbf{s}}^{(n)}, \quad (15.15)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} + \dots + \boldsymbol{\omega}^{(n)} \quad (15.16)$$

и могут быть вычислены по такой же схеме. Отсюда для тела

$$\mathbf{P}^{(i)} = M \dot{\mathbf{s}}^{(i)}, \quad (15.17)$$

$$\mathbf{\Lambda}_S^{(i)} = A p^{(i)} \mathbf{e} + B q^{(i)} \mathbf{e}' + C r^{(i)} \mathbf{e}'' \quad (15.18)$$

Кинетическая энергия квадратична по скоростям, так что для ее вычисления потребуются более громоздкая техника. Ограничимся для простоты системами с двумя степенями свободы:

$$\mathbf{r}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, q_2), \quad \dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{v}_v^{(1)} + \mathbf{v}_v^{(2)}. \quad (15.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_v (\mathbf{v}_v^{(1)} + \mathbf{v}_v^{(2)}, \mathbf{v}_v^{(1)} + \mathbf{v}_v^{(2)}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_v (\mathbf{v}_v^{(1)})^2 + \frac{1}{2} \sum m_v (\mathbf{v}_v^{(2)})^2 + \sum m_v (\mathbf{v}_v^{(1)}, \mathbf{v}_v^{(2)}). \end{aligned} \quad (15.20)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{T^{(1)}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{T^{(2)}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{T^{(12)}}$

Здесь $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ — кинетические энергии координатных движений, а $T^{(12)}$ — слагаемое, которое в обоих координатных движениях равно нулю, но не равно нулю в общем случае. Тем не менее знание координатных движений позволяет его вычислить.

Рассмотрим случай, когда система представляет собой единственное твердое тело; тогда

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}^{(1)} + \dot{\mathbf{s}}^{(2)}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(2)}, \quad \mathbf{\Lambda}_S = \mathbf{\Lambda}_S^{(1)} + \mathbf{\Lambda}_S^{(2)},$$

и потому

$$T^{(1)} = \frac{M}{2} (\dot{\mathbf{s}}^{(1)})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}_S^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(1)}), \quad (15.21)$$

$$T^{(2)} = \frac{M}{2} (\dot{s}^{(2)})^2 + \frac{1}{2} (\Lambda_S^{(2)}, \omega^{(2)}), \quad (15.22)$$

$$\begin{aligned} T^{(12)} &= \Sigma m (\dot{s}^{(1)} + [\omega^{(1)} \times \rho], \dot{s}^{(2)} + [\omega^{(2)} \times \rho]) = \\ &= \Sigma m (\dot{s}^{(1)}, \dot{s}^{(2)}) + \Sigma m ([\omega^{(1)} \times \rho], [\omega^{(2)} \times \rho]) + \\ &+ \underbrace{(\dot{s}^{(1)}, [\omega^{(2)} \times \Sigma m \rho])}_{=0} + \underbrace{([\omega^{(1)} + \Sigma m \rho], \dot{s}^{(2)})}_{=0} = \\ &= M (\dot{s}^{(1)}, \dot{s}^{(2)}) + (\omega^{(1)}, \Sigma m [\rho \times [\omega^{(2)} \times \rho]]). \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые равны нулю. Наконец,

$$T^{(12)} = M (\dot{s}^{(1)}, \dot{s}^{(2)}) + (\omega^{(1)}, \Lambda_S^{(2)}). \quad (15.23)$$

Формулы (20) — (23) составляют основу вычислений всех динамических величин для тела. Если в системе тел несколько, то вычисления проводятся для каждого в отдельности, а потом результаты суммируются.

В качестве примера приведем систему из задачи 3. Имеем $q_1 = s$, $q_2 = a$. Составим таблицу (рис. 37):

$\omega^{(1)} = -\frac{\dot{s}}{r} e_\xi$ $\dot{s}^{(1)} = \dot{s} e_\xi$ $P^{(1)} = M \dot{s} e_\xi$ $\Lambda^{(1)} = Mr^2 \omega_{отн} = -Msr e_\xi$ $T^{(1)} = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 +$ $+ \frac{1}{2} Msr \frac{\dot{s}}{r} = M \dot{s}^2$	$\omega^{(2)} = \dot{a} e_\xi$ $\dot{s}^{(2)} = [\dot{a} e_\xi \times \overline{OS}]$ $P^{(2)} = M \dot{a} (se_\eta - re_\xi)$ $\Lambda^{(2)} = Mr^2 \dot{a} e_\xi$ $T^{(2)} = \frac{M}{2} (s^2 + r^2) \dot{a}^2 +$ $+ \frac{Mr^2}{2} \dot{a}^2 = \frac{M}{2} (s^2 + 2r^2) \dot{a}^2$
$T^{(12)} = -M \dot{s} \dot{a} r - Mr^2 \frac{\dot{s}}{r} \dot{a} = -2Mr \dot{s} \dot{a}$	

Этот метод медленно, но верно приводит к цели, так как технические затруднения равномерно распределяются по выкладкам.

Аналогичный подход позволяет постепенно произвести

**вычисление обобщенных сил,
зависящих только от положения.**

Дана система N точек m_i ; действуют силы

$$F_i = F_i(r_1, \dots, r_N). \quad (15.24)$$

Для вычисления обобщенных сил Q_i в базовую форму

$$\beta = \Sigma (F_i, \delta r_i) \quad (15.25)$$

надо подставить изохронные дифференциалы функции $\mathbf{r}$, и собрать коэффициенты при δq_i :

$$\delta \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (15.26)$$

В нашем случае выражение изохронных дифференциалов такое же, как и скоростей (ср. с (11)). Теперь вспомним теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma (\mathbf{F}_v, \dot{\mathbf{r}}_v).$$

Правая часть сейчас так же зависит от $\dot{q}_i$, как форма (25) от δq_i . Иначе говоря,

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma Q_i(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i. \quad (15.27)$$

Этим обстоятельством особенно удобно пользоваться в случае твердого тела, так как тогда в силу (3), (15), (16)

$$Q_i \dot{q}_i = (\Phi, \dot{\mathbf{s}}^{(i)}) + (\mathbf{G}_S, \boldsymbol{\omega}^{(i)}). \quad (15.28)$$

Итак, обобщенные силы для тела (и, конечно, точки) можно определять, рассматривая фиктивные координатные движения и вычисляя Q_i по формулам (28).

Нередко бывает, что

$$\dot{\mathbf{s}}^{(i)} = \dot{q}_i \mathbf{e}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(i)} = 0, \quad \text{или, напротив,} \quad \dot{\mathbf{s}}^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{\omega}^{(i)} = \dot{q}_i \mathbf{e}^{(i)},$$

где $\mathbf{e}^{(i)}$ — некоторый единичный вектор. Тогда соответственно

$$Q_i = (\Phi, \mathbf{e}^{(i)}), \quad Q_i = (\mathbf{G}_S, \mathbf{e}^{(i)}),$$

т. е. обобщенная сила имеет смысл проекции суммарной силы или проекции момента сил на некоторое направление.

Задача 7. Имеется осесимметричная катушка. Пусть ее радиус будет r , центральный момент инерции относительно оси симметрии $I = Md^2$ (d называется радиусом инерции). Катушка катится без проскальзывания по горизонтальной прямой: трения качения нет, а ее тянут с силой F за нить, натянутую под углом α к прямой и намотанную концентрически оси катушки на расстоянии a . Определить ускорение центра катушки (рис. 31).

Начнем с того, что выпишем

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{x} \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z = -\frac{\dot{x}}{r} \mathbf{e}_z. \quad (15.29)$$

Кинетическая энергия катушки

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2} \left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right) \dot{x}^2.$$

Поскольку нет проскальзывания, а трение качения равно нулю, реакцию опоры в теореме об изменении кинетической энергии учитывать не следует (тема 9). Имеем

$$\Phi = F \cos \alpha e_x + (F \sin \alpha - mg) e_y, \quad G_S = F a e_z.$$

Поэтому по формулам (28) и (29):

$$Q\dot{x} = F \cos \alpha \dot{x} - Fa\dot{\varphi} = F \frac{r \cos \alpha - a}{r} \dot{x},$$

$$Q = F \frac{r \cos \alpha - a}{r}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = M \left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right) \ddot{x},$$

из универсального уравнения Лагранжа получаем ответ:

$$\ddot{x} = \frac{F}{M} \frac{r(r \cos \alpha - a)}{r^2 + d^2}. \quad (15.30)$$

В принципе следовало бы еще задать коэффициент трения скольжения k , вычислить R_x и проверить неравенство $|R_x| \leq k|R_y|$. Но здесь мы считали $k = \infty$, так что единственное условие возможности качения состоит в том, что вертикальная составляющая силы не превосходит веса катушки: $F \sin \alpha \leq mg$.

В заключение заметим, что вычисление обобщенных сил по описанной схеме нецелесообразно, когда систему можно рассматривать как идеализированную и движущуюся только за счет потенциальных сил (как правило, это сила тяжести и силы упругости): тогда удобнее сразу вычислить потенциальную энергию $V(q_1, \dots, q_n)$ и составить уравнения Лагранжа (здесь $Q_i = -\partial V / \partial q_i$).

Тема 16

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Две массы $m_1 = M - \mu$ и $m_2 = \mu$ движутся в согласии с законом тяготения Ньютона (задача двух тел). Кроме того, в пространстве имеется еще третья масса $m_3 = m$, которая находится под действием сил притяжения к первым двум телам, но сама влияния на них не оказывает (например, случай системы Земля — Луна — спутник). Смысл слов «ограниченная» состоит именно в этом. Уравнения движения массы m имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -f \frac{m(M - \mu)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) - f \frac{m\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)),$$

где изменение $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ нам известно. Поскольку уравнения движения можно сократить на m , в дальнейшем считаем $m = 1$.

В инерциальной системе координат, связанной с центром масс точек m_1 и m_2 , эти точки движутся в постоянной плоскости по кеплеровским орбитам: окружностям, эллипсам, параболам, гиперболам или прямым. Будем рассматривать только первый случай: тогда говорят о круговой ограниченной задаче трех тел. Кроме того, будем рассматривать только те движения единичной массы, которые лежат в плоскости орбит m_1, m_2 . Итак, в плоскости OXY вокруг точки O вращаются две массы μ и $M-\mu$ с угловой скоростью ω ; они притягивают третью, единичную массу, по закону тяготения Ньютона. Требуется исследовать движения этой массы (рис. 78).

Угловая скорость вращения $\omega = \omega(M, \mu, r, \rho, f)$, причем величины M, r, f размерно независимы: $[f] = L^3/T^2 M$. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{fM}{r^3}} \bar{\omega} \left(\frac{\mu}{M}, \frac{\rho}{r} \right).$$

Впредь мы можем принимать $M=r=f=1$. Покажем, что тогда $\omega = \bar{\omega} \equiv 1$. Введем подвижную систему координат Oxy с началом в центре масс и вращающуюся с угловой скоростью ω . Относительно нее каждая из масс $M-\mu, \mu$ находится в равновесии, т. е. переносная сила инерции уравнивается гравитационной:

$$\mu \omega^2 (1-\rho) = \mu (1-\mu), \quad (1-\mu) \omega^2 \rho = \mu (1-\mu).$$

Отсюда

$$\mu (1-\rho) = (1-\mu) \rho$$

(это означает, что центр масс — в начале координат), так что

$$\rho = \mu, \quad \bar{\omega} = 1.$$

Лагранжиан $L = T - V$ выпишем в подвижной системе координат:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\text{вс}}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\text{отн}} + [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}])^2 = \frac{1}{2} ((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2),$$

$$V = -\frac{1-\mu}{V(\mu+x)^2+y^2} - \frac{\mu}{V(1-\mu-x)^2+y^2} = -\frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2},$$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - V.$$

Уравнения движения имеют следующий вид (мы получили автономную обобщенно-натуральную систему):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где $W = V - (x^2 + y^2)/2$. Отсюда положения относительного равновесия (в инерциальной системе координат им соответствуют движения по окружности) определяются из системы уравнений

$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$. Произведем вычисления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial y} &\equiv -y + \frac{1-\mu}{R_1^3} y + \frac{\mu}{R_2^3} y \equiv y f(x, y) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial x} &\equiv -x + \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{R_1^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{R_2^3} = \\ &= x f(x, y) + \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) = 0.\end{aligned}$$

Положения относительно равновесия в этой задаче (критические точки W) называются точками либрации. Они могут быть двух типов:

а) Коллинеарные точки либрации L_1, L_2, L_3 (точки Эйлера): $y=0$. Тогда для нахождения нужных значений x надо определить точки экстремума функции

$$W(x, 0) = -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x-1+\mu|}.$$

Таких точек ровно три, что легко увидеть из графика (рис. 79) и доказать, если надо, аккуратно (функция простая; в частности, она выпукла на каждом интервале непрерывности).

б) Треугольные точки либрации L_4, L_5 (точки Лагранжа): $y \neq 0$. Тогда из первого уравнения следует $f=0$, а из второго — $R_1=R_2$, т. е. единичная масса составляет с притягивающими равносторонний треугольник. Координаты такой точки либрации:

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \sqrt{3}/2.$$

Произведем линеаризацию в окрестности точки либрации, для чего положим $x=x_*+\xi$, $y=y_*+\eta$. Тогда уравнения движения в первом приближении получат вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_* \xi + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_* \eta &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \right|_* \xi + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_* \eta &= 0.\end{aligned}$$

Им можно придать форму (см. конец темы 12)

$$A \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \eta \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = 0.$$

Нас интересует только вопрос об устойчивости равновесий в первом приближении.

А. Коллинеарные точки либрации:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = b > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = a < 0.$$

так что уравнения первого приближения суть

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + a\xi = 0, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + b\eta = 0$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 + b \end{vmatrix} = \lambda^4 + (a + b + 4)\lambda^2 + ab = 0.$$

Откуда $(\lambda^2)_1, (\lambda^2)_2$ действительны и имеют разные знаки, так как в силу $ab < 0$ дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, а произведение корней отрицательно. Следовательно, имеются два действительных собственных значения, например, $\pm\lambda_1$, одно из которых положительно, что доказывает неустойчивость.

Б. Треугольные точки либрации: для определенности пусть

$$x = \frac{1}{2} - \mu + \xi, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta.$$

Каждое слагаемое функции W разложим в ряд Тейлора, но выписывать будем лишь члены второго порядка по ξ, η . Имеем для третьего слагаемого

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \dots - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Далее будем в очередной раз использовать формулу

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3).$$

Первое слагаемое гравитационного потенциала разложится так:

$$\begin{aligned} -\frac{1-\mu}{R_1} &= -\frac{1-\mu}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \xi\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta\right)^2}} = \\ &= -\frac{1-\mu}{\sqrt{1 + \xi + \sqrt{3}\eta + \xi^2 + \eta^2}} = \dots + \frac{1-\mu}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \\ &\quad - \frac{3}{8}(1-\mu)(\xi + \sqrt{3}\eta)^2 + \dots \end{aligned}$$

Аналогично второе:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{R_2} &= -\frac{\mu}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \xi\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta\right)^2}} = \\ &= -\frac{\mu}{\sqrt{1 - \xi + \sqrt{3}\eta + \xi^2 + \eta^2}} = \\ &= \dots + \frac{\mu}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{3}{8}\mu(-\xi + \sqrt{3}\eta)^2 + \dots \end{aligned}$$

Складывая все три формулы, получаем

$$W = \dots - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (\xi^2 + 2(1-2\mu) \sqrt{3} \xi \eta + 3\eta^2).$$

Отсюда уравнения первого приближения:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \frac{3}{4} \xi - \frac{\sqrt{27}}{4} (1-2\mu) \eta = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \frac{\sqrt{27}}{4} (1-2\mu) \xi - \frac{9}{4} \eta = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 3/4 & -2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4} (1-2\mu) \\ 2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4} (1-2\mu) & \lambda^2 - 9/4 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu (1-\mu) = 0.$$

Его дискриминант равен $1-27\mu(1-\mu)$; если он положителен, то оба корня квадратного уравнения отрицательны, и имеем устойчивость. В противном случае чисто мнимых корней мы не получим. Итак, условие устойчивости

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Это значит, что μ (или $1-\mu$) довольно мало, примерно $< 0,04$ (в общем случае отношение приведенной массы к суммарной $< 1/27$).

Лагранжиан от времени не зависит. Интеграл типа энергии

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + W = h.$$

При каждом фиксированном h на плоскости Oxy выделяется

область Хилла $\{W(x, y) \leq h\}$

(область возможности движения), граница которой называется кривой Хилла (в этой задаче). Число кривых Хилла и их расположение меняются, когда h пересекает одно из критических значений функции $W(L_i)$. Нетрудно показать, что всегда

$$W(L_1) < W(L_2), \quad W(L_3) < W(L_4) = W(L_5).$$

Из наших вычислений вторых производных в точках либрации вытекает, что L_1, L_2, L_3 являются седлами, L_4, L_5 — симметричными максимумами. Кроме того, $W \rightarrow -\infty$, когда (x, y) стремится к одной из притягивающих точек или к бесконечности. Таким образом, график W можно представить себе как большую параболоидальную гору, вблизи вершины которой образовались две бес-

конечно глубокие воронки. На рис. 8 изображены не критические области Хилла со всевозрастающим h . При $h > W(L_{4,5})$ область Хилла совпадает со всей плоскостью (за вычетом притягивающих масс). О том, как движется единичная масса в областях Хилла, на элементарном уровне сказать ничего нельзя.

Тема 17

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Следуя Якоби, будем говорить, что имеется система уравнений первого порядка в канонической форме, если имеется $2n$ независимых переменных:

$$(z_1, \dots, z_{2n}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

задана функция

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t),$$

обладающая тем свойством, что правые части уравнений из нашей системы суть частные производные от функции H :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17.1)$$

Таким образом, переменные z разбиваются на так называемые пары сопряженных переменных (p_i, q_i) ; скорость изменения каждой переменной есть частная производная по ей сопряженной, причем в одном случае со знаком минус, в другом — со знаком плюс.

Уравнения такого вида впервые применялись в работах Лагранжа и Пуассона по небесной механике. Трактовка их как общей формы уравнений движения механических систем под действием потенциальных сил была дана позднее Гамильтоном (для систем свободных точек), Якоби (для систем со стационарными связями), Остроградским и Донкином (для систем с нестационарными, вообще говоря, связями). Для нас основой такой трактовки послужит

Теорема. Пусть имеется регулярная функция $L(\dot{q}, q, t)$:

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0. \quad (17.2)$$

Тогда система уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (17.3)$$

эквивалентна системе уравнений в канонической форме (1), где

$$H = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) \Big|_{\dot{q}_i = f_i(p, q, t)}, \quad (17.4)$$

причем лагранжевы скорости $\dot{q}_i$ выражены через обобщенные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (17.5)$$

путем обращения последних формул при фиксированных q, t (обращение возможно в силу регулярности). Таким образом, эта теорема носит локальный характер.

Функция $\sum p_i \dot{q}_i - L$ и есть та самая, которая была интегралом типа энергии в случае, когда $\partial L / \partial t \equiv 0$. Будучи выраженной через p, q, t , она называется гамильтонианом или функцией Гамильтона. В частности,

ГАМИЛЬТОНИАН КЛАССИЧЕСКОЙ НАТУРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

$$H = (p_1, \dots, p_n) \begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + V, \quad (17.6)$$

где

$$\|a^{ij}\| = \|a_{ij}\|^{-1},$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q, t). \quad (17.7)$$

При вычислении конкретных гамильтонианов надо пользоваться не общей формулой (4), а частным результатом (6) (или хотя бы (11.56)), так как в противном случае придется каждый раз проводить одни и те же приведения подобных членов, повторяя схему вывода формулы (6). Вот этот вывод:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j a_{ij} \dot{q}_j \Rightarrow \dot{q}_j = \sum_k a^{jk} p_k \Rightarrow H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V = \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \\ &+ V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} a^{ik} a^{jl} p_k p_l + V = \frac{1}{2} \sum_{k,l} a^{kl} p_k p_l + V. \end{aligned}$$

В данном случае обращение формул (5) производится не локально, а сразу на всей области определения $\mathbf{R}^n(\dot{q})$ и значений $\mathbf{R}^n(p)$.

Для точки в трехмерном пространстве в консервативном поле

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z), \\ A &= \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{vmatrix}, \\ H &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \end{aligned} \quad (17.8)$$

С динамической точки зрения p_x, p_y, p_z — компоненты обычного импульса:

$$p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z}. \quad (17.9)$$

Разумеется, подставлять эти формулы в (17.8) не следует. Существо формализма канонических уравнений состоит именно в пользовании только переменными p, q, t .

Доказательство теоремы. Уравнения Лагранжа в силу регулярности лагранжиана можно привести к системе первого порядка (темы 11):

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = X(\dot{q}, q, t). \quad (17.10)$$

Согласно центральной лемме (там же),

$$\frac{d^X}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (17.11)$$

Кроме того,

$$\frac{d^X}{dt} q_i = \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i. \quad (17.12)$$

От переменных $\dot{q}, q$ мы переходим к переменным p, q . Поэтому правые части уравнений (11), (12) выразим через них:

$$\frac{d^X p_i}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)_{\dot{q}_i = f_i(p, q, t)}, \quad \frac{dq_i}{dt} = f_i(p, q, t).$$

Осталось показать, что

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)_{\dot{q}=f} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (17.13)$$

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (17.14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k p_k f_k - L|_{\dot{q}=f} \right) = \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \\ &+ \left(- \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right)_{\dot{q}=f} = - \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{\dot{q}=f}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_k p_k f_k - L|_{\dot{q}=f} \right) = f_i + \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial p_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial p_i} = f_i.$$

Теорема доказана. Попутно получена полезная формула (14). Она позволяет сначала выписать гамильтониан (по формуле (6)), а потом установить связь определяющих скоростей $\dot{q}_i$ с импульсами p_i . Эта связь одновременно составляет половину уравнений Гамильтона (1).

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть имеется функция $F(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$. Ее производная в силу системы уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^H}{dt} F &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right). \end{aligned}$$

Определение. Говорят, что в выражении функции H переменные $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$ отделяются, если существуют функции

$$\chi = f(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k)$$

(от времени t не зависит!) и

$$\tilde{H}(\chi, p_{k+1}, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n, t)$$

такие, что

$$\begin{aligned} H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) &= \\ &= H(f(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k), p_{k+1}, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n, t). \end{aligned} \quad (17.15)$$

Теорема. В этом случае функция f является первым интегралом уравнения Гамильтона.

Доказательство. Учитывая структуру f и H , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^H}{dt} f &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \chi} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \chi} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следствия.

1) Если $f=H$ (при этом H не зависит от времени), то функция $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ есть первый интеграл (это — обобщение интеграла энергии).

2) Если $\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0$, то положим $f(p_n, q_n) = p_n$ и получим, что $p_n = \text{const}$ — первый интеграл. Это — обобщение кинестенического (циклического) интеграла. Разумеется, его можно получить и просто из

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0.$$

Формулы (4), (5), (13) показывают, что $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ или $\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ или соответственно $\frac{\partial L}{\partial q_n} \equiv 0$. Поэтому в конкретных задачах интеграл типа энергии

или кинестенический интеграл одинаково легко получить как при помощи формализма Эйлера — Лагранжа, так и при помощи канонического формализма. Получать интегралы иного происхождения удобнее (намного удобнее) на основе канонического формализма. Приведем пример:

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ПЛОСКОГО ДИПОЛЯ

Потенциальная энергия дается формулой (3.11). Выпишем лагранжиан в полярных и декартовых координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k \cos \theta}{r^2},$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Он не зависит от времени, так что интеграл энергии у нас есть. Есть ли еще один интеграл? Циклической координаты ни в системе определяющих координат r, θ , ни в системе x, y нет. Выпишем гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{k \cos \theta}{r^2},$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Первый вариант можно привести к виду:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{p_\theta^2}{m} + k \cos \theta \right).$$

Видно, что переменные θ и p_θ отделились, а функция

$$f = p_\theta^2/m + k \cos \theta$$

является первым интегралом. Поскольку

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta},$$

этот интеграл можно представить в эквивалентных формах:

$$f = mr^4 \dot{\theta}^2 + k \cos \theta = \text{const},$$

$$f = m(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + kx/\sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}.$$

Получается интеграл уравнений Эйлера — Лагранжа, не являющийся кинестеническим ни в каких координатах, так как кинестенический интеграл всегда линеен по определяющим скоростям (например, при движении в центральном поле сил $V = V(r)$ сохраняется $p_\theta = mr^2 \dot{\theta}$).

СКОБКА ПУАССОНА

функций $F(p, q, t)$ и $G(p, q, t)$ задается формулой

$$(F, G) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right). \quad (17.16)$$

Таким образом,

$$\frac{d^H F}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H). \quad (17.17)$$

В частности, имеет место интересное операторное представление уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_i = (p_i, H), \quad \dot{q}_i = (q_i, H). \quad (17.18)$$

С его помощью легко вычисляются базисные скобки Пуассона:

$$(q_i, q_j) = (p_i, p_j) \equiv 0, \quad (q_i, p_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (17.19)$$

$$\left(\text{например, } (q_i, q_j) = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \equiv 0 \text{ при } H = q_i \right).$$

Перечислим свойства скобок Пуассона, вытекающие из определения, но вместе с (19) более удобные при вычислениях:

1. Антисимметричность: $(F, G) = -(G, F)$;
2. Операторное свойство: если $F = \Phi(f_1, \dots, f_m)$, то

$$(F, G) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} (f_i, G). \quad (17.20)$$

Это легко видно из

$$\begin{aligned} (F, G) &= \frac{d^G}{dt} F - \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} \frac{d^G}{dt} f_i - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \\ &= \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} \left(\frac{d^G}{dt} f_i - \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} (f_i, G). \end{aligned}$$

В частности,

$$(\alpha F, G) = \alpha (F, G), \quad (17.21)$$

$$(F_1 + F_2, G) = (F_1, G) + (F_2, G). \quad (17.22)$$

$$(F_1 F_2, G) = F_1 (F_2, G) + F_2 (F_1, G). \quad (17.23)$$

Другими словами, взятие скобки Пуассона с заданной функцией G является дифференциальным оператором.

3. Тождество Пуассона:

$$((F, G), H) + ((H, F), G) + ((G, H), F) \equiv 0. \quad (17.24)$$

Его можно доказать прямой выкладкой, которую мы опустим.

4. Правило дифференцирования по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}, G \right) + \left(F, \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right). \quad (17.25)$$

Здесь α — переменная, не входящая в список $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. В частности, может быть, $\alpha = t$.

Теорема Пуассона. Если $F(p, q, t)$, $G(p, q, t)$ — первые интегралы канонических уравнений с функцией $H(p, q, t)$, то их скобка Пуассона (F, G) — тоже интеграл тех же уравнений.

Доказательство основывается на всех свойствах 1—4. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) \equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} + (G, H) \equiv 0,$$

поскольку F, G — первые интегралы. Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (F, G) + ((F, G), H) = \\ & = \left\{ + \left(F, \frac{\partial G}{\partial t} \right) - ((G, H), F) \right\} + \left\{ + \left(F, \frac{\partial G}{\partial t} + (G, H) \right) \right\} \\ & = \left\{ + \left(\frac{\partial F}{\partial t}, G \right) - ((H, F), G) \right\} + \left\{ + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H), G \right) \right\} \equiv 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Эффективным способом получать новые первые интегралы теорема Пуассона не является, так как скобка Пуассона редко выводит за пределы заданного класса функций. Примером будут

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА

для движения точки в трехмерном пространстве. Наряду с гамильтонианом (8) рассмотрим также функции x, y, z (координаты) p_x, p_y, p_z (импульсы) и

$$\Lambda_x = yp_z - zp_y, \quad \Lambda_y = zp_x - xp_z, \quad \Lambda_z = xp_y - yp_x$$

(моменты импульсов). Требуется вычислить попарные скобки Пуассона всех перечисленных десяти функций. Базисные скобки Пуассона в данном случае суть

$$\begin{aligned} (x, p_x) &= 1, \quad (x, p_y) = 0, \quad (x, p_z) = 0, \\ (y, p_x) &= 0, \quad (y, p_y) = 1, \quad (y, p_z) = 0, \\ (z, p_x) &= 0, \quad (z, p_y) = 0, \quad (z, p_z) = 1 \end{aligned}$$

(заодно это — часть фундаментальных скобок). После вычислений, в частности, получается

$$\begin{aligned} (p_x, H) &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (\Lambda_z, H) = -x \frac{\partial V}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial x}, \\ (\Lambda_z, p_z) &= 0, \quad (\Lambda_z, p_x) = p_y, \quad (\Lambda_z, p_y) = -p_x, \\ (\Lambda_z, z) &= 0, \quad (\Lambda_z, x) = y, \quad (\Lambda_z, y) = -x, \\ (\Lambda_x, \Lambda_y) &= \Lambda_z \end{aligned}$$

и аналогично для других комбинаций индексов.

Выкладку приведем только для последней скобки:

$$(yp_z - zp_y, zp_x - xp_z) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (y p_z, z p_x) - (z p_y, z p_x) - (y p_z, x p_z) + (z p_y, x p_z) = \\
 &= y p_x (p_z, z) - 0 - 0 + x p_y (z, p_z) = x p_y - y p_x.
 \end{aligned}$$

Видим, что вычисление попарных скобок взятых функций (с естественным физическим содержанием) почти не вывело нас за пределы заданного списка. Исключение составляют первые скобки, но как раз их надо приравнять к нулю, чтобы p_x или Λ_z были бы первыми интегралами.

ТЕОРЕМА ЛИ

Функция $F(p, q)$ есть первый интеграл канонических уравнений с функцией $H(p, q)$ тогда и только тогда, когда функция $H(p, q)$ инвариантна относительно фазового потока системы кинетических уравнений с гамильтонианом F .

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$, мы имеем $(F, H) \equiv 0$.

Пусть зависимости

$$p = \bar{p}(p^0, q^0, s), \quad q = \bar{q}(p^0, q^0, s) \quad (17.26)$$

представляют собой общее решение канонических уравнений

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{dq}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (17.27)$$

Инвариантность функции H означает, что

$$H(\bar{p}(p^0, q^0, s), \bar{q}(p^0, q^0, s)) = H(p^0, q^0),$$

что после дифференцирования по s эквивалентно

$$\frac{dH}{ds} = \sum_i \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = (H, F) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим случай, когда движение точки в трехмерном пространстве имеет первый интеграл $\Lambda_z = x p_y - y p_x$. Каков смысл потока, порождаемого этим интегралом? Уравнения (27) будут:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_x}{ds} &= -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial x} \equiv -p_y, \quad \frac{dp_y}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial y} \equiv p_x, \quad \frac{dp_z}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \equiv 0, \\
 \frac{dx}{ds} &= -y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{dz}{ds} = 0;
 \end{aligned}$$

из последних трех уравнений вытекает, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

так что поток (26) здесь отвечает группе поворотов вокруг оси z . Вообще, линейному по импульсам интегралу

$$F = \sum \varphi_i(q) p_i$$

соответствует поток, который можно сузить на пространство переменных $q_1, \dots, q_n$, так как система уравнений

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv \Phi_i(q), \quad i = 1, \dots, n,$$

интегрируется независимо. Смысла остальных уравнений касаться не будем.

Обсудим возможность обобщить теорему Ли так, чтобы H, F могли зависеть от времени.

Первое, что приходит в голову, — считать, что группа симметрий будет действовать теперь в пространстве p, q, t . Это заставляет присоединить к порождающей группе системе (27) с $F = F(p, q, t)$ еще одно уравнение

$$\frac{dt}{ds} = \chi(p, q, t)$$

с неизвестной пока правой частью. В силу такой расширенной системы

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t} \chi + (H, F),$$

и одновременно

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) \equiv 0,$$

поскольку F — первый интеграл. Следовательно,

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t} \chi + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Потребуем, чтобы $dH/ds \equiv 0$. Какую функцию χ ни взять, при $\partial H/\partial t \equiv 0$ обязательно должно быть $\partial F/\partial t \equiv 0$, т. е. применительно к автономным системам обобщением будут охвачены только интегралы, не зависящие от времени. Уже это противоречит поставленной цели. Более того. Даже если мы явно предположим, что $\partial H/\partial t \neq 0$, то обязаны будем потребовать, что

$$\chi = - \frac{\partial F}{\partial t} / \frac{\partial H}{\partial t},$$

так что группа симметрий будет зависеть не только от функции F , как раньше, но и от функции H .

Приходится отказаться от идеи инвариантности функции H . Тогда можно попросту положить $\chi \equiv 0$, иначе говоря, рассматривать t как параметр. Теперь

$$\frac{dH}{ds} = - \frac{\partial F}{\partial t},$$

т. е. в неавтономном случае гамильтониан не инвариантен, а предписанным образом изменяется под действием потока (26), зависящего от параметра t .

В случае, когда интеграл F линеен по импульсам, можно произвести сравнение с теоремой Ли—Нетер. Соответствующий интеграл

$$J = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s} = \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial s}$$

может зависеть от времени. Таким образом, лагранжиан L в этом случае инвариантен, а гамильтониан — нет.

На практике лагранжианы, гамильтонианы и первые интегралы редко зависят от времени, поэтому принято всегда ассоциировать существование интеграла с инвариантностью гамильтониана (хотя, строго говоря, как мы видели, это не совсем оправдано). Эта трактовка восходит к Ли. Изложенной только что теоремы точно в том виде, как она здесь дана, сам Ли не формулировал, поскольку оперировал, главным образом, не с обыкновенными дифференциальными уравнениями в канонической форме, а с некоторым тесно связанным с ними уравнением в частных производных, к изучению которого мы приступаем в следующей теме.

Тема 18

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Пусть есть система канонических уравнений

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q, t). \quad (18.1)$$

Соответствующим уравнением Гамильтона—Якоби называется уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \quad (18.2)$$

Вместо каждого вхождения переменной p_i в выражение для H подставляется $\partial S / \partial q_i$ и ко всему прибавляется $\partial S / \partial t$. Получается левая часть. Задача Коши для этого уравнения обычно ставится так: найти решение $S(q, t)$ такое, что

$$S(q, t_0) = \varphi(q). \quad (18.3)$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Пусть $S(q, t)$ — решение. В расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}(p, q, t)$ введем многообразие

$$L = \left\{ p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n} \right\}. \quad (18.4)$$

Оно называется когерентным, или лагранжевым.

Теорема. Многообразие L является инвариантным для исходной канонической системы, т. е. как бы «соткано из решений»: если начальная точка $(p^0, q^0, t^0) \in L$, то соответствующее решение уравнений (1) целиком лежит на L .

Доказательство. Вообще, многообразие

$$L = \{F_1(x, t) = \dots = F_k(x, t)\} \subset \{(x, t)\}$$

инвариантно относительно системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x, t)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{d^x}{dt} F_i = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} X_i = 0 \big|_{(x,t) \in L}.$$

В нашем случае должно быть

$$\begin{aligned} -\frac{dp_i}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \bigg|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}}. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Это действительно так, ибо если мы продифференцируем

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, q, t\right) = 0$$

по q_i , то получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_i} = 0 \bigg|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}},$$

что совпадает с (5).

Существо доказанной теоремы в том, что уравнения (1) являются уравнениями характеристик Коши для уравнения в частных производных (2). Дальнейшее фактически является трактовкой этого обстоятельства в специфических условиях.

ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Так называется семейство решений уравнения Гамильтона—Якоби $S(\alpha, q, t)$, зависящее от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ удовлетворяющее условию невырожденности

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0. \quad (18.6)$$

Не следует думать, что полный интеграл содержит все решения уравнения Гамильтона—Якоби, как это может показаться по звучанию термина. Например, $S + f(\alpha)$ — тоже полный интеграл, не совпадающий с S . Однако все решения уравнения Гамильтона полный интеграл действительно позволяет получить.

Теорема Якоби. Если найден полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, то общее решение уравнений Гамильтона по-

лучается из соотношений

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (18.7)$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad (18.8)$$

в которых $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ рассматриваются как произвольные константы.

Процедура получения общего решения состоит в следующем. Последние соотношения имеют вид

$$\beta_k = f_k(\alpha, q, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}.$$

Заметим, что

$$\det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0.$$

Следовательно, из соотношений (8) можно выразить

$$q_i = \bar{q}_i(\alpha, \beta, t),$$

а после подстановки в первые n равенств (7) получим

$$p_i = \bar{p}_i(\alpha, \beta, t) = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\alpha, \bar{q}(\alpha, \beta, t), t).$$

Это и будут формулы общего решения с $2n$ постоянными.

Доказательство теоремы. Поскольку первые уравнения — (7) — задают инвариантные многообразия (при любых произвольно зафиксированных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$), достаточно показать, что последние n равенств (8) обладают тем же свойством (при любых произвольно зафиксированных $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$: тогда их совместный уровень будет иметь размерность $2n+1-n-n=1$, т. е. окажется фазовой траекторией). В самом деле,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \cdot \frac{\partial H}{\partial p}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t \right) \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Это и требовалось.

Подчеркнем, что все рассуждения носят локальный характер. В частности, не утверждается, что существует полный интеграл, определенный при всех q для каждого α . Скоро мы увидим, какие здесь возникают трудности.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Допустим, что функция Гамильтона не зависит от времени: $H = H(p, q)$. Тогда уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\frac{\partial S}{\partial q}, q \right) = 0. \quad (18.9)$$

Применим следующий прием. Будем искать полный интеграл этого уравнения в виде

$$S(\alpha, q, t) = -h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + I(\alpha, q). \quad (18.10)$$

Здесь $h(\alpha)$ — функция, которая подбирается из каких-то дополнительных соображений или просто берется произвольно. Обычно берут просто $h \equiv \alpha_1$. Подставим выражение $S = -ht + I$ в уравнение (9). Получим

$$H\left(\frac{\partial I}{\partial q}, q\right) = h(\alpha). \quad (18.11)$$

Видим, что получилось уравнение в частных производных с меньшим числом переменных (переменная t отсутствует).

Формулы теоремы Якоби (7), (8) становятся такими:

$$p = \frac{\partial I}{\partial q^0}, \quad \beta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}.$$

Поскольку система сейчас автономна, выбор начального времени роли не играет; в частности, можно положить $t=0$, $p=p^0$, $q=q^0$. Получим

$$p^0 = \frac{\partial I}{\partial q^0}, \quad \beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha}, \quad (18.12)$$

где $I = I(q^0, \alpha)$. Далее

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|. \quad (18.13)$$

Поэтому, как и в теореме Якоби, алгебраические преобразования позволяют получить

$$p^0 = p^0(\alpha, \beta), \quad q^0 = q^0(\alpha, \beta).$$

В этом смысл функции $I(\alpha, q^0)$: формулы (12) связывают произвольные константы α , β с начальными значениями p^0 , q^0 . Более того, общее решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} p &= p^0\left(\alpha, \beta + \frac{\partial h}{\partial \alpha} t\right), \\ q &= q^0\left(\alpha, \beta + \frac{\partial h}{\partial \alpha} t\right). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Впредь мы опустим индекс 0 в уравнениях (12) и будем исследовать так называемые формулы перехода:

$$p = \frac{\partial I}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha}. \quad (18.15)$$

(11) называют укороченным уравнением Гамильтона—Якоби. Доказывать (локальных) теорем существования полного интеграла не будем, так как дальнейшее будет посвящено непосредственному решению укороченного уравнения Гамильтона—Якоби в зада-

чах механики. Подчеркнем, что для решения задачи важен не столько сам полный интеграл I этого уравнения, сколько формулы перехода (15).

К функции I всегда можно прибавить $f(\alpha)$; тогда формулы (15) примут вид

$$\rho = \frac{\partial I}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \quad (18.16)$$

Итак, переменные β определены с точностью до сдвига на $\partial f / \partial \alpha$.

ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Лагранжиан одномерной натуральной системы всегда приводится к виду $L = \dot{s}^2/2 - V(s)$; тогда гамильтониан

$$H = \frac{p_s^2}{2} + V(s),$$

уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial I}{\partial s} \right)^2 + V(s) = h(\alpha). \quad (18.17)$$

Видим, что оно может иметь решение только в области возможности движения $\mathfrak{M}^1 = \{V(s) \leq h\}$. Преобразуем его:

$$p_s = \frac{\partial I}{\partial s} = \pm \sqrt{2(h(\alpha) - V(s))}. \quad (18.18)$$

Мы получили одновременно первую формулу перехода (15) и уравнение, позволяющее получить I путем интегрирования. На плоскости p, q уравнение (18) задает две симметричные кривые, отвечающие фиксированной константе α ; константа β меняется вдоль каждой кривой. Имеем соответственно, взяв начальную точку интегрирования $s_0(\alpha) \in \mathfrak{M}^{h(\alpha)}$,

$$I = \pm \int_{s_0(\alpha)}^s \sqrt{2(h(\alpha) - V(s))} ds \quad (18.19)$$

и

$$\beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \pm \int_{s_0(\alpha)}^s \frac{h'(\alpha)}{\sqrt{2(h(\alpha) - V(s))}} ds \mp \sqrt{2(h(\alpha) - V(s_0))} \cdot \frac{ds_0}{d\alpha}.$$

Впредь будем выбирать s_0 так, чтобы второе слагаемое обратилось в нуль, т. е. брать $s_0 \equiv \text{const}$ или $V(s_0(\alpha)) \equiv h(\alpha)$. Итак, имеем (18) и

$$\beta = \pm h'(\alpha) \int_{s_0(\alpha)}^s \frac{ds}{\sqrt{2(h(\alpha) - V(s))}}. \quad (18.20)$$

Это не очень удобные формулы. Во-первых, стоит $\pm$, т. е. полу-

но два отдельных решения в области $p \gg 0$, $p \ll 0$ (на этом можно остановиться только если $V(s) < h$ везде; см. рис. 45). Во-вторых, подынтегральная функция в формуле для β обращается в нуль на границе области возможности движения. В-третьих, в случае движения в потенциальной яме движение носит колебательный характер, т. е. p то больше, то меньше нуля, тогда как наши формулы пока что применимы лишь на коротком отрезке времени.

МЕТОД ВЕЙЕРШТРАССА

(глобальное решение в потенциальной яме)

Пусть мы имеем потенциальную яму с невырожденным минимумом s_* внутри (рис. 42). Если $h_* = V(s_*)$, то вместо V возьмем $V - h_*$ т. е. будем считать, что $V(s_*) = 0$. Пусть

$$\mathfrak{M}^h = [s_2(h), s_1(h)], \quad 0 < h < \bar{h}.$$

Примем, что $V'(s) \neq 0$ на интервале $(s_2(\bar{h}), s_1(\bar{h}))$ за исключением точки s_* . Существует гладкая замена переменной $s = f(q)$ такая, что $V = q^2/2$ (лемма Морса, тема 6). Возьмем $s_0 = s_*$. Тогда

$$\begin{aligned} p_s &= \pm \sqrt{2h - q^2}, \\ \beta &= \pm h'(\alpha) \int_0^{q(s)} \frac{f'(q) dq}{\sqrt{2h - q^2}}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Положим теперь

$$q = \sqrt{2h} \sin \xi. \quad (18.22)$$

Эта замена «законна» на интервалах $(-\pi/2, \pi/2)$ или $(-3\pi/2, -\pi/2)$, на которых $\sin \xi$ — монотонная функция; при этом

$$dq = \pm \sqrt{2h} d\xi$$

соответственно. Кроме того,

$$p_s = \sqrt{2h} \cos \xi$$

больше нуля и меньше нуля также соответственно. От $\pm$ мы уже избавились. Имеем далее: функция

$$\beta = h'(\alpha) \int_0^{\xi} f'(\sqrt{2h} \sin \xi) d\xi = \Phi_{(\alpha\xi)}(\xi)$$

монотонна и определена на всей прямой. Она имеет обратную

$$\xi = \Phi_{\alpha}^{-1}(\beta),$$

откуда $q = \sqrt{2h(\alpha)} \sin \Phi_{\alpha}^{-1}(\beta)$ и, наконец,

$$\begin{aligned} p_s &= \sqrt{2h(\alpha)} \cos \Phi_{\alpha}^{-1}(\beta), \\ s &= f(\sqrt{2h(\alpha)} \sin \Phi_{\alpha}^{-1}(\beta)). \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, что получится, если мы формально возьмем

ξ вне интервала $(-3\pi/2, \pi/2)$. Тогда $\xi = 2\pi n + \xi_1$, где ξ_1 принадлежит этому интервалу, а поскольку подинтегральная функция периодична, получаем

$$\beta = \Phi_\alpha(\xi_1) + nh'(\alpha) \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h(\alpha)} \sin \xi) d\xi.$$

Таким образом, β изменится на $\chi(\alpha)$, что не выходит за рамки произвола, допускаемого в формулах перехода вообще.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ

Теперь мы можем воспользоваться возможностью подбирать $h(\alpha)$. Попробуем добиться того, что $\chi(\alpha) \equiv 2\pi$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h} \sin \xi) d\xi &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h} \sin \xi) d\xi = \\ &= 2 \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \frac{ds}{\sqrt{2(h-V(s))}} = 2 \frac{d}{dh} \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \sqrt{2(h-V(s))} ds = \frac{d}{dh} S(h). \end{aligned}$$

Поэтому нам желательно получить $h'(\alpha) S'(h(\alpha)) \equiv 2\pi$. Будем искать не функцию $h(\alpha)$, а обратную к ней: $\alpha(h)$. Тогда $S'(h) = 2\pi\alpha'(h)$, так что нам достаточно взять

$$\alpha(h) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \sqrt{2(h-V(s))} ds = \frac{1}{2\pi} S(h).$$

Величина α , определенная таким образом, называется «действие». Величина β , ей соответствующая, определена теперь с точностью до $2\pi n$ и поэтому называется «угол».

Пример. Гармонический осциллятор: $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{m} x^2$ (мы разделили на массу). Имеем сразу

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_x^2}{2} + \frac{k}{m} \frac{x^2}{2}, \\ p_x &= \frac{\partial I}{\partial x} = \pm \sqrt{2h(\alpha) - \frac{k}{m} x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что надо взять $x = f(q) = \sqrt{m/k} q$, тогда $f'(q) \equiv \sqrt{m/k}$. Полагая $x(\alpha) = \xi(\alpha) \equiv 0$, получим

$$\beta = \Phi_\alpha(\xi) = h'(\alpha) \sqrt{\frac{m}{k}} \xi.$$

Целесообразно положить

$$h'(\alpha) = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad h(\alpha) = \sqrt{\frac{k}{m}} \alpha.$$

Тогда $\beta = \xi$, и приходим к

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{2h} \sin \beta, \quad p_x = \sqrt{2h} \cos \beta.$$

Общее решение получается в виде (14):

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{2\alpha} \sin \left(\beta + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ p_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{2\alpha} \cos \left(\beta + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

(отметим, что здесь $p_x = \dot{x}$, а не $m\dot{x}$).

ОТДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Если у нас задача со многими степенями свободы, то первым шагом применения метода Гамильтона—Якоби является сведение задачи к решению нескольких одномерных уравнений. Иногда это удастся сделать сразу, иногда — поэтапно. Продемонстрируем общую идею самого распространенного приема. Пусть в выражении гамильтониана отделяются переменные $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$:

$$H = \tilde{H}(f(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k), p_{k+1}, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n, t).$$

тогда полный интеграл можно искать в виде

$$S = F(q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k) + \tilde{S}(q_{k+1}, \dots, q_n, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, t)$$

(не утверждается, что он обязательно имеет такой вид!), где функции F и $\tilde{S}$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона—Якоби

$$f\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_k}, q_1, \dots, q_k\right) = \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{H}\left(\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_n}, q_{k+1}, \dots, q_n, t\right) = 0.$$

Это можно сочетать с исключением времени (при $\partial H / \partial t = 0$ переменная t в уравнении Гамильтона—Якоби тоже в некотором смысле отделяется).

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу Кеплера ($m=1$):

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\mu}{r}, \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}.$$

Здесь отсутствует время и отделяются переменные p_φ, φ :

$f \equiv p_\varphi$. Положим $\chi(\alpha_2) = \alpha_2$, $h(\alpha) = \alpha_1$,

$$S = F(\varphi, \alpha_2) - \alpha_1 t + I(r, \alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \alpha_2 \Rightarrow F = \alpha_2 \varphi$ и

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \alpha_1,$$

$$\tilde{I} = \pm \int_{r(\alpha)}^r \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}} dr,$$

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \varphi \pm \int_{r(\alpha)}^r \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}} dr.$$

По теореме Якоби (минус формулы перехода) общее решение уравнения движения находится из

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_2, \quad p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\frac{\mu}{r}},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{\mu}{r}}},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \varphi \pm \int -\frac{\alpha_2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}}.$$

Проведем анализ последней формулы. Подкоренное выражение представим в виде, полагающемся по методу Вейерштрасса:

$$2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 + \frac{\mu^2}{\alpha_2^2} - \left(\frac{\alpha_2}{r} - \frac{\mu}{\alpha_2} \right)^2.$$

Обязательно должно быть $2\alpha_2 + \mu^2/\alpha_2^2 \geq 0$. Положим

$$q = \frac{\alpha_2}{r} - \frac{\mu}{\alpha_2}, \quad r = \frac{\alpha_2}{\frac{\mu}{\alpha_2} + q}.$$

Интегрировать удобно от $r_{\min}$, $q_{\max}$. Заметим, что $-\frac{\alpha_2}{r^2} dr = dq$, так что наш интеграл приобретает вид

$$\beta_2 = \varphi \pm \int_{q_{\max}}^q \frac{dq}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{\mu^2}{\alpha_2^2} - q^2}},$$

и после замены $q = \sqrt{2\alpha_1 + \mu^2/\alpha_2^2} \sin \xi$ приходим к $\beta = \varphi + \xi - \pi/2$. Поэтому

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \beta - \varphi, \quad q = \sqrt{2\alpha_1 + \frac{\mu^2}{\alpha_2^2}} \cos(\varphi - \beta_2),$$

$$r = \frac{\alpha_2^2}{\mu} \left/ \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(\varphi - \beta_2)} \right] \right.$$

Получаем уравнение орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta_2)}.$$

При этом мы выяснили смысл величины p : это радиус круговой орбиты с данной постоянной площадью α_2 , причем в эллиптическом движении это расстояние достигается на угловом расстоянии $\pi/2$ от перигея. Угол β_2 есть полярный угол перигея.

Формула, содержащая β_1 , нужна для получения зависимости r и φ от времени. Ее нетрудно привести к виду (10.7), на чем останавливаться не будем.

Классическая динамика родилась и выросла в эпоху, когда астрономия, математика, механика и физика были единой наукой; последним олицетворением этого единства был А. Пуанкаре. Сейчас на классическую динамику смотрят как на модель многочисленных реальных движений, собственное лицо которой вырисовывается на фоне красивого переплетения ряда математических дисциплин.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

В плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ с течением времени t перемещается точка массы m (желая сохранить естественную размерность величин, мы не будем торопиться с тривиальным упрощением $m=1$).

ЗАКОН НЬЮТОНА определяет движения точки

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых считаются заданными и достаточно гладкими:

$$m\ddot{x} = X(\dot{x}, \dot{y}, x, y, t), \quad m\ddot{y} = Y(\dot{x}, \dot{y}, x, y, t). \quad (1.1)$$

Более коротко в векторном виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t).$$

Вектор $\mathbf{F} = (X, Y)$ называется *силой*. Принято $\mathbf{r}$ называть *положением* точки, пару $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ — *состоянием*. Движение однозначно определяется начальным состоянием $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ в мгновение $t=t_0$.

Чаше всего $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Тогда если $\mathbf{r}(t)$ — движение, то и $\mathbf{r}(t+\tau)$ — движение (поскольку $\mathbf{F}$ не зависит от t) и $\mathbf{r}(-t)$ — тоже движение (поскольку $\mathbf{F}$ не зависит от $\dot{\mathbf{r}}$) с начальным состоянием $\mathbf{r}_0, -\dot{\mathbf{r}}_0$. Иначе говоря, *движения допускают сдвиг и инверсию времени*. Можно считать $t_0=0$. Множество, на котором определена вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, есть некоторая область $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$; обычно это $\mathbb{R}^2$ целиком или $\mathbb{R}^2$ без нескольких точек. Явно указывать область определения и степень гладкости $\mathbf{F}$ (пусть C^∞ для простоты) не принято.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. *Интегралом движения, или первым интегралом*, называется функция $\Phi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ такая, что для всех движений $\Phi(\dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{r}(t)) = f = \text{const}$. Другими словами, тождественно

равна нулю ее полная производная в силу системы (1):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\mathbf{r}}}, \frac{1}{m} \mathbf{F} \right) \equiv 0. \quad (1.2)$$

Интеграл у нас по определению не зависит от времени. Это не обязательно, но удобно для дальнейшего. Задачи с интегралами, содержащими t , встречаются редко.

Простейшие типы первых интегралов. Приведем три простых утверждения, идейное наполнение которых прояснится позднее.

А. *Интеграл импульса:*

$$X \equiv 0 \Rightarrow J_1 = m\dot{x} = mc = \text{const.}$$

Б. *Интеграл кинетического момента:*

$$xY - yX \equiv 0 \Rightarrow J_2 = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mc = \text{const.}$$

В. *Интеграл энергии:*

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) = h = \text{const.}$$

Функция $V(x, y)$ называется *потенциалом*, или *потенциальной энергией*, функция $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ — *кинетической энергией*.

ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ. Постоянная f в определении первого интеграла обычно задается начальным состоянием. Но не исключено, что f будет задана из каких-либо других соображений и потребует узнать, где могут происходить движения с этим значением f первого интеграла Φ . Это и есть *область возможности движения*:

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{r} : \exists \dot{\mathbf{r}}, \Phi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = f\}. \quad (1.3)$$

Весьма выразительно описание ее в случае интеграла энергии. Поскольку кинетическая энергия неотрицательна,

$$\mathfrak{M}^h = \{V(\mathbf{r}) \leq h\}, \quad (1.4)$$

т. е. является суб-уровнем потенциальной энергии (проверить по определению (3)).

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ. *Траекторией движения* $\mathbf{r}(t)$ называется множество положений, которые точка последовательно занимает с течением времени (t пробегает максимальный интервал определения $\mathbf{r}(t)$, содержащий t_0). Чтобы получить уравнение траектории или ее части в виде $\chi(x, y) = 0$, в принципе надо из формул движения $x = x(t)$, $y = y(t)$ исключить t .

Множеству достижимости $A^v(r_0)$ для начала дадим приближительное определение: это все точки, в которые можно попасть из точки r_0 с начальной скоростью v_0 (заданной по модулю).

Пример. Построить траектории, множества $A^v(r_0)$ и области $\mathfrak{M}^h$ для точки в поле тяжести: $\mathbf{F} = -mge_y$, $V = mgy$.

Решение. Общее решение уравнений движения имеет вид

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t - gt^2/2.$$

Положив $x_0=y_0=0$ (не уменьшая общности), $\dot{x}_0=v_0 \cos \theta$, $\dot{y}_0=v_0 \sin \theta$, при $\dot{x}_0 \neq 0$ получим уравнение траекторий: это параболы

$$y = v_0 \operatorname{tg} \theta \cdot x - \frac{h}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2.$$

При $\dot{x}_0=0$ траектория вырождается в полупрямую. «Кривая достижимости за время t » имеет вид $x^2 + (y + gt^2/2)^2 = v_0^2 t^2$. Это окружность с падающим по вертикали центром и линейно растущим радиусом. Строим огибающую этого семейства окружностей и получаем ответ: множество достижимости

$$A^{v_0}(0, 0) = \left\{ y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{x^2}{2v_0^2/g} \right\}$$

лежит под *параболой безопасности* (рис. 56), вершина которой находится на границе области возможности движения:

$$\mathfrak{M}^h = \left\{ y \leq \frac{h}{mg} \right\}, \quad h = \frac{mv_0^2}{2} + mgy_0.$$

З а м е ч а н и е. В задачах с интегралом энергии $A^{v_0}(\mathbf{r}_0) \subset \mathfrak{M}^h$,

где $h = \frac{mv_0^2}{2} + V(\mathbf{r}_0)$. В случае компактности области $\mathfrak{M}^h$

множество $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ обязательно имеет общие точки с ее границей (см. § 6).

Задача 1. Выписать интегралы движения, построить траектории и множества $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ для гармонического осциллятора:

$$\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{r}, \quad V = \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2), \quad \kappa > 0.$$

Для простоты пусть $y_0=0$. Как $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ расположено в $\mathfrak{M}^h$? Ответ:

$$A^{v_0}(x_0, 0) = \left\{ \frac{x^2 \omega^2}{x_0^2 \omega^2 + v_0^2} + \frac{y^2 \omega^2}{v_0^2} \leq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{M}^h = \left\{ x^2 + y^2 \leq \frac{2h}{\kappa} \right\}, \quad h = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\kappa x_0^2}{2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. Пусть движение обладает интегралом

$$J = m(\varphi(x, y) \dot{x} + \psi(x, y) \dot{y}) \equiv 0,$$

который линеен по скоростям. Тогда в некоторой декартовой системе координат ξ, η интеграл J записывается в одной из следующих форм (с точностью до постоянного множителя):

$$(A) \quad J = m \dot{\xi},$$

$$(B) \quad J = m(\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}),$$

т. е. совпадает с интегралом импульса или момента.

Доказательство. Приравняв к нулю полную производную J , получим систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \Phi X + \Psi Y = 0,$$

которая легко решается:

$$\Phi = ay + b, \quad \Psi = -ax + c.$$

При $a=0$ имеем первый случай, при $a \neq 0$ — второй.

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ.
Множество $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ равно замыканию объединения траекторий всех движений, проходящих через $\mathbf{r}_0$ со скоростью v_0 :

$$A^{v_0}(\mathbf{r}_0) = \overline{\bigcup_{|v_0|=v_0} \sigma(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}.$$

Пример. Бигармонический осциллятор:

$$\mathbf{F} = (-\alpha x, -\beta y), \quad V = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Из закона Ньютона $m\ddot{x} = -\alpha x$, $m\ddot{y} = -\beta y$ получаем

$$x = x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t,$$

$$y = y_0 \cos \omega_2 t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_2} \sin \omega_2 t,$$

где величины $\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ — частоты колебаний по соответствующей координате. Имеется интеграл энергии

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2) = h.$$

Область $\mathfrak{M}^h$ — эллипс с полуосями $a = \sqrt{2h/\alpha}$, $b = \sqrt{2h/\beta}$. Наряду с H имеются еще интегралы

$$\Phi_1 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 = c_1, \quad \Phi_2 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\beta y^2 = c_2.$$

Эти интегралы *квадратичны по скоростям*. Поскольку $\Phi_1 + \Phi_2 = H$, будем пользоваться только ими. Заметим, что область возможности движения при условии, что заданы две константы,

$$\mathfrak{M}^{c_1 c_2} = \left\{ |x| \leq \sqrt{\frac{2c_1}{\alpha}}; \quad |y| \leq \sqrt{\frac{2c_2}{\beta}} \right\}$$

является прямоугольником, вписанным в эллипс $\mathfrak{M}^h$, $h = c_1 + c_2$.

1. Пусть ω_1/ω_2 — рациональное число. В этом случае у колебаний вдоль координатных осей есть общий период: все траектории замкнуты.

2. Пусть число ω_1/ω_2 иррационально. Тогда все траектории незамкнуты и любая из них заполняет $\mathfrak{M}^{c_1 c_2}$ всюду плотно:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^{c_1 c_2} &= \zeta(\mathbf{r}_0, v_0, \theta) = \left\{ |x| \leq \sqrt{\frac{2c_1}{\alpha}}; |y| \leq \sqrt{\frac{2c_2}{\beta}} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} |x| \leq \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{\alpha} v_0^2 \cos^2 \theta}, \\ |y| \leq \sqrt{y_0^2 + \frac{m}{\beta} v_0^2 \sin^2 \theta}, \end{array} \right.\end{aligned}$$

где $\zeta(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)$ — траектории точки, выпущенной со скоростью v_0 из точки $\mathbf{r}_0$ под углом θ к оси абсцисс. Вообще замыкание объединения множеств равно замыканию объединения замыканий этих множеств. Поэтому множество достижимости

$$A^{v_0}(\mathbf{r}_0) = \overline{\bigcup_{0 \leq \theta < 2\pi} \zeta(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)} = \overline{\bigcup \zeta(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)}$$

есть объединение однопараметрического (по θ) семейства прямоугольников (рис. 57). В общем случае это криволинейный восьмиугольник — пересечение эллипса $\mathfrak{M}^h$ с полосами:

$$\left\{ |x| \leq \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{\alpha} v_0^2} \right\}; \quad \left\{ |y| \leq \sqrt{y_0^2 + \frac{m}{\beta} v_0^2} \right\}.$$

Вопросы. Где находится начальная точка (x_0, y_0) ? Во что может вырождаться восьмиугольник?

Задача 2. Показать, что если потенциал $V = \alpha x^2/2$, $\alpha > 0$, то множества достижимости совпадают с областями возможности движения.

§ 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ СИЛ В ПЛОСКОСТИ

Пусть $xY - yX \equiv 0$, т. е. $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$. При $\mathbf{r} \neq 0$ положим $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Будем писать $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_r$, так что F здесь — модуль силы с некоторым знаком (минус в случае притягивающей силы). Введем полярные координаты (рис. 50):

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r \sin \varphi, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

После дифференцирований

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

По структуре это — формулы пересчета компонент векторов скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{a}$ в репер $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, повернутый на угол φ про-

тив часовой стрелки. Следовательно,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

а закон Ньютона принимает вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0.$$

Эта система уравнений второго порядка с неизвестными функциями $r(t)$, $\theta(t)$. Интеграл кинетического момента

$$J = m(xy\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} = \frac{m}{2} \frac{dS}{dt} = mc = \text{const},$$

где S — площадь, заметаемая вектором $\mathbf{r}(t)$ (отсюда равносильный термин «интеграл площадей»), рис. 50.

При $c=0$ имеем движение по прямой $\varphi = \text{const}$. При $c \neq 0$ (для определенности пусть $c > 0$) функция $\varphi = \varphi(t)$ монотонна (возрастает), имеет обратную, и потому траекторию движения $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ целесообразно задавать в виде $r = r_*(\varphi)$.

ФОРМУЛЫ КЛЕРО. Пусть $r = r_*(\varphi)$ траектория движения с постоянной площадью $c \neq 0$. Тогда скорость движения $v(t)$ и действующую силу $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ тоже можно выразить через φ . После этого будут справедливы формулы

$$v^2 = c^2 \left(\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 \right), \quad F = -mc^2 \rho^2 \left(\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho \right); \quad \rho = \frac{1}{r_*(\varphi)}.$$

Для доказательства надо выполнить замену переменных t на φ , r на ρ в выражениях

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad F = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).$$

Пользуясь тем, что в силу интеграла площадей

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} = \frac{c}{r^2} \frac{d}{d\varphi},$$

приходим к

$$v^2 = c^2 \left(\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right), \quad F = \frac{mc^2}{r^2} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{1}{r} \right],$$

после чего остается перейти к ρ .

ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ

Лемма 1. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r, \varphi)\mathbf{e}_r$ — центральное силовое поле. Оно потенциально тогда и только тогда, когда функция F не зависит от φ , а потенциал

$$V(x, y) = V(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad V(r) = - \int F dr.$$

Для доказательства заметим, что выражение $Xdx + Ydy = Fdr$ должно быть полным дифференциалом.

Всюду ниже центральное поле считается потенциальным. Интеграл энергии представим в виде

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = h.$$

Если зафиксированы константы c и h , то область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$ (определение аналогично) дается формулой

$$\mathfrak{M}_c^h = \left\{ r : V(r) + \frac{mc^2}{2r^2} \leq h \right\}. \quad (2.1)$$

Функция $V_c = V + \frac{mc^2}{2r^2}$ называется *приведенным потенциалом*.

Лемма 2. В центральном поле сил с потенциалом $V(r)$ рассмотрим движение с постоянной площадью c . Тогда функции $r(t)$, $\rho_*(\varphi)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{d}{dr} V_c(r), \quad (2.2A)$$

$$m \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} = - \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\rho} V_c \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad c \neq 0. \quad (2.2B)$$

Это выводится из закона Ньютона и второй формулы Клеро.

Обратим внимание на связь, которая существует между формулами (1) и (2). Множество $\mathfrak{M}_c^h$ состоит, вообще говоря, из нескольких колец, включая варианты, когда кольцо имеет нулевой или бесконечный радиус (рис. 52). Число этих колец меняется (происходит перестройка $\mathfrak{M}_c^h$), когда h пересекает критическое значение приведенного потенциала $h_i^* = V_c(r_i^*)$, где r_i^* — критическая точка V_c : $\left. \frac{dV_c}{dr} \right|_{r_i^*} = 0$. А из формулы (2) видно, что

критическим точкам V_c соответствуют простейшие из центральных движений, так называемые относительные равновесия $r(t) = r_i^*$ или $\rho_*(\theta) = \rho_i^*$. При этом энергия этих движений, как легко проверить, равна в точности соответствующему значению h_i^* .

Поясним термин «приведенный потенциал». Смысл леммы 2 состоит в том, что от двух уравнений движения второго порядка (закон Ньютона в плоскости — формулы (1) из § 1) мы перешли к одному уравнению. Здесь мы имеем частный случай общего приведения по Раусу (см. ниже § 15), где и возникают соответствующие общие объекты, в том числе приведенный потенциал.

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА. Пусть точка притягивается к началу координат согласно закону обратных квадратов:

$$\mathbf{F} = - \frac{\mu m}{r^2} \mathbf{e}_r; \quad V = - \frac{\mu m}{r}.$$

Классифицируем области возможности движения и траектории. Пусть $2h = mk$. Области $\mathfrak{M}_c^k$ находятся из неравенства

$$- \frac{2\mu}{r} + \frac{c^2}{r^2} \leq k.$$

Единственная критическая точка у функции слева (фактически у приведенного потенциала) есть $r^* = c^2/\mu$, критическое значение $k^* = -\mu^2/c^2$. Нарисовав график, легко убедиться, что $\mathcal{M}_c^k$ есть внешность круга (взятая с границей) при $k \geq 0$, кольцо при $k^* < k < 0$, окружность при $k = k^*$, пустое множество при $k < k^*$. Перейдем к траекториям. Поскольку

$$V_c\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\mu t\rho - \mu \frac{c^2 \rho^2}{2},$$

выписываем уравнение (2Б) и сразу решаем его:

$$m\rho'' + m\rho = \mu m/c^2, \\ \rho = \mu/c^2 + A \cos(\varphi - \hat{\varphi}).$$

Здесь $A, \hat{\varphi}$ — произвольные постоянные. В силу интеграла энергии и первой формулы Клеро

$$v^2 = k + 2\mu\rho,$$

$$c^2 \left(\frac{\mu^2}{c^4} + 2 \frac{\mu A}{c^2} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + A^2 \right) = k + 2\mu \left(\frac{\mu}{c^2} + A \cos(\varphi - \hat{\varphi}) \right),$$

откуда $c^2 A^2 = k + \mu^2/c^2$ и, наконец,

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos(\varphi - \hat{\varphi})}, \quad \rho = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = A\rho = \sqrt{1 + \frac{kc^2}{\mu^2}}.$$

Траектории суть гиперболы при $e > 1$ ($k > 0$), параболы при $e = 1$ ($k = 0$), эллипсы при $0 \leq e < 1$ ($k^* \leq k < 0$), превращающиеся в окружности при $e = 0$ ($k = k^*$). Все это — конические сечения с фокусом в начале координат. При $\varphi = \hat{\varphi}$ имеем направление на перицентр — ближайшую к началу координат точку орбиты.

Эллиптические орбиты можно задать уравнением

$$|\mathbf{r}| + |\mathbf{r} - \mathbf{s}| = 2a, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{s}$ — радиус-вектор второго фокуса, a — большая полуось эллипса:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{1+e} + \frac{\rho}{1-e} \right) = -\frac{\mu}{k},$$

зависящая только от полной энергии.

Обратим внимание также на смысл величины ρ : она равна радиусу r^* круговой орбиты с данной постоянной площадью c . На эллиптической орбите точка достигает этого расстояния, будучи на угловом расстоянии от перицентра $\varphi - \hat{\varphi} = \pm \pi/2$.

Величина e называется эксцентриситетом (ea есть расстояние между фокусом и центром эллипса).

ЭЛЛИПС БЕЗОПАСНОСТИ. Построим множества достижения в задаче Кеплера при $k < 0$. Можно зафиксировать эту константу вместо начальной скорости или, что равносильно, большую полуось траектории. Имеем из (3)

$$|\mathbf{r}_0| + |\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}| = 2a.$$

Сложив с (3), получаем

$$|r| + |r_0 - s| + |r - s| = 4a - |r_0|.$$

Поскольку

$$|r_0 - s| + |r - s| \geq |r - r_0|, \quad (2.4)$$

выводим, что

$$|r| + |r - r_0| \leq 4a - |r_0|, \quad (2.5)$$

т. е. множество достижимости лежит внутри (5). Равенство как частный случай неравенства (4) реализуется на каждой траектории (прямая, проведенная через r_0 и второй фокус s , пересекает эллипс еще в одной точке). Следовательно, неравенство (5) определяет множество достижимости. Его граница

$$\{|r| + |r - r_0| = 4a - |r_0|\}$$

и называется *эллипсом безопасности*.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ. Пусть h некритическое значение приведенного потенциала V_c ; рассмотрим движения, происходящие в связной компоненте $\mathfrak{M}_c^h$ типа кольца:

$$r_1(h) \leq r \leq r_2(h), \quad \rho_2(h) \leq \rho \leq \rho_1(h).$$

Из первой формулы Клеро или леммы 2

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2}{mc^2} \left(h - V_c \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)}. \quad (2.6)$$

В этой формуле надо брать определенный знак, пока подкоренное выражение не обратится в нуль. При этом движение выходит на границу $\mathfrak{M}_c^h$, затем $d\rho/d\varphi$ меняет направление изменения и следует взять уже противоположный знак. Таким образом, функция $\rho_*(\varphi)$ получается периодической, а траектории, например, такими, как на рис. 52. Величина

$$\Phi_{ch} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\frac{2}{mc^2} \left(h - V_c \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \right]^{-1/2} d\rho$$

называется *апсидальным углом*. Траектории замкнуты, когда Φ_{ch}/π — рациональное число; в противном случае они всюду плотно заходят кольцо. В задаче Кеплера $\Phi_{ch} \equiv \pi$, для гармонического осциллятора $\Phi_{ch} \equiv \pi/2$. Других задач с постоянным апсидальным углом не существует.

Когда $r_1 = 0$ или $r_2 = \infty$, движения не возвращаются близко к исходной точке и потому менее интересны. Хорошее представление о них дает

Задача 3. Классифицировать области возможности движения, траектории, вычислить апсидальный угол, когда потенциал $V = -\mu m/r + \nu m/2r^2$. Часть ответа: решение при $1 + \nu/c^2 > 0$ имеет

вид

$$\rho_* = \frac{1}{p} (1 + e \cos n(\theta - \hat{\theta})),$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{v}{c^2}}, \quad p = \frac{c^2 + v}{\mu}, \quad e = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{kc^2}{\mu^2}};$$

если $e < 1$, то $\theta_{ch} = \pi/n$.

§ 3. ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки P ,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

разложение вектора $\mathbf{a}$ по соответствующему ортонормированному реперу, приложенному в начале координат O . Вектор

$$\mathbf{r} = OP = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

называется *радиусом-вектором* точки P . Он всегда приложен в точке O . В каких точках приложены остальные векторы, пока роли не играет.

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вычисляется по формулам

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \psi, \quad (3.1)$$

где ψ — угол между векторами, a, b — их модули.

Зафиксируем ориентацию нашего трехмерного евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Наглядно говоря, это значит, что отныне действует соглашение применять только правые реперы — такие, что базисные векторы, глядя им навстречу, можно по порядку осмотреть против часовой стрелки. Формальное определение можно предложить такое: ориентация пространства задана, когда отмечен один репер $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ и принято тройку векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ считать правой, если

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \geq 0.$$

В частности, матрица перехода от правого репера к правому имеет положительный детерминант.

Векторное произведение $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ ортогонально сомножителям $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, его модуль $|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]| = ab |\sin \psi|$, тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ есть правая. Векторное произведение можно записать в виде формального определителя:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & a_x & b_x \\ \mathbf{e}_y & a_y & b_y \\ \mathbf{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Векторное произведение невырождено в том смысле, что для каждого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ существует такой $\mathbf{b}$, что их векторное произведение отлично от нуля. Более точно, $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Обратим внимание, что и скалярное и векторное произведения имеют два эквивалентных определения и соответственно два способа вычисления: геометрический (с использованием модулей векторов и угла между ними) и аналитический (оперирующий с компонентами векторов в ортонормированном репере). На практике приходится пользоваться обоими, причем от выбора удачного способа часто зависит если не сам успех в решении задачи, то быстрота его достижения. В общих чертах справедливо следующее наблюдение: в тех случаях, когда векторы удобно расположены, в частности, когда достаточно ясен угол между ними, эффективнее геометрический способ; и если же в расположении векторов нет никакой очевидной специфики, то лучше, не торопясь, применить аналитический способ.

Когда заведомо известно направление вектора $\mathbf{a}$, например $\mathbf{a} \parallel \mathbf{e}_z$, то появляется соблазн написать $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z$. В этом случае a не модуль, а, как иногда говорят, алгебраическое значение модуля — модуль со знаком. Короче, возможна вольность речи, к которой надо быть готовым.

Операции с участием трех векторов: *смешанное произведение*

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}; \quad (3.3)$$

двойное векторное произведение (дважды применить (2))

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (3.4)$$

Коэффициенты здесь в нарушении общего правила написаны после векторов. Это позволяет легко запомнить формулу, прочитав ее как «бац минус цап».

Скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно определено; векторное — билинейно, антисимметрично и удовлетворяет тождеству $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] + [\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]] + [\mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] = 0$.

Если сомножители зависят от времени, то при дифференцировании действует *правило Лейбница*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi \mathbf{a} &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right) + \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right), \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \right] + \left[\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right]. \end{aligned}$$

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. Для динамики точки в $\mathbf{R}^3$ можно повторить все сказанное в начале § 1. Кроме того,

из закона Ньютона выводится важная формула

$$\frac{d}{dt} m [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]. \quad (3.5)$$

Вектор (функция состояния) $\mathbf{L} = m[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]$ называется *кинетическим моментом*, или *моментом количества движения точки* (относительно начала координат O), величина $[\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ — *моментом силы*. Кинетический момент сохраняется, т. е. $m[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = m\mathbf{c} = \text{const}$, если $[\mathbf{r} \times \mathbf{F}] \equiv 0$ или, эквивалентно, $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$. Сила в этом случае называется *центральной*. Тогда движение происходит в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{c}$ (и было рассмотрено в § 2):

$$(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = (\mathbf{r}, [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]) = (\dot{\mathbf{r}}, [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]) = 0. \quad (3.6)$$

Если $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$, то интеграл энергии

$$H = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = h, \quad V(r) = - \int F(r) dr.$$

Задача 4. Рассмотрим движение под действием силы $\mathbf{F} = -\mu\mathbf{r}/r^2\mathbf{e}_r$. Введем вектор Лапласа

$$\Phi = \frac{-\mu\mathbf{r}}{r} + [\dot{\mathbf{r}} \times [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]]. \quad (3.7)$$

Доказать, что 0) $r\dot{\mathbf{r}} \equiv (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$; 1) Φ — первый интеграл задачи; 2) Φ ортогонален $\mathbf{c}$, т. е. лежит в плоскости орбиты; 3) $\Phi^2 = \mu^2 + k c^2$, где $k = 2h/m$.

Таким образом, в задаче Кеплера сохраняются H , $\mathbf{L}$, Φ , т. е., на первый взгляд, имеется семь скалярных интегралов движения ($7 = 1 + 2 \cdot 3$). Утверждения 1 и 2 в последней задаче показывают, что между ними есть две тождественные зависимости:

$$(\Phi, \mathbf{L}) \equiv 0, \quad \Phi^2 - \frac{2H\mathbf{L}^2}{m^3} - \mu^2 \equiv 0,$$

так что независимых интегралов пять. Задача Кеплера выделяется среди других необычно большим числом интегралов, определенных во всем пространстве состояний.

Пусть $\mathbf{r}(t)$ — движение, происходящее при заданных значениях h , $\mathbf{c}$, Φ , а θ — угол между Φ и $\mathbf{r}$. Умножим (7) скалярно на $\mathbf{r}$:

$$r\Phi \cos \theta = (\mathbf{r}, \mathbf{v} \times \mathbf{c}) - \mu r = c^2 - \mu r,$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\Phi}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{c^2 k}{\mu^2}}.$$

Получили уже известное нам уравнение конического сечения.

Легко видеть, что

$$r \geq r_{\pi} = \frac{p}{1+e},$$

причем минимум достигается при $\theta=0$, так что вектор Φ направлен в *перицентр* орбиты.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ

Пусть $\mathfrak{M}$ — одномерное подмногообразие в $\mathbb{R}^2$. Оно может быть задано двумя способами:

- 1) уравнением $f(x, y) = 0$, причем $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Big|_{\mathfrak{M}} \neq 0$.
- 2) параметрически: $x = x(q)$, $y = y(q)$, причем $\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 \neq 0$.

Эти способы локально равносильны теореме о неявной функции. Задание в виде графика функции, например, $y = \varphi(x)$ относится к обоим способам сразу ($y - \varphi(x) = 0$ или $y = \varphi(q)$, $x = q$).

Особую роль играет *натуральный параметр* s (алгебраическая длина дуги). Если $r(q)$ — некоторая параметризация, то

$$s(q) = \int_{q_0}^q |\mathbf{r}'(q)| dq = \int_{q_0}^q \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

монотонная функция q . Она имеет обратную $q(s)$; зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q(s))$ называется *натуральной параметризацией* $\mathfrak{M}$.

В каждой точке $\mathfrak{M}$ определен *репер Френе* (*естественный репер*):

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{e}_\nu = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1}.$$

Очевидно, $\{\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\nu\}$ — ортонормированный репер (в ортогональности $\mathbf{e}_\tau$ и $\mathbf{e}_\nu$ можно убедиться, продифференцировав тождество $(\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\tau) = 1$). Величина $|d^2\mathbf{r}/ds^2| = k(s)$ называется *кривизной* в точке $\mathbf{r}(s)$, величина $\rho = 1/k$ называется *радиусом кривизны*. При перемещении по кривой скорость и ускорение

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_\nu.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая кривая, заданная в $\mathbb{R}^2$ уравнением $f(x, y) = 0$. Допустим, что точка обязана двигаться только по $\mathfrak{M}$ (говорят, что на нее *наложена связь*). Пусть в окрестности $\mathfrak{M}$ или только вдоль $\mathfrak{M}$ задана сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Отображение $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *движением*, если для него существует переменный вектор $\mathbf{R}(t)$, ортогональный к кривой в точке $\mathbf{r}(t)$ такой, что выполняется тождество (закон Ньютона)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (4.1)$$

Вектор $\mathbf{R}$ называется *силой реакции связи* при движении $\mathbf{r}(t)$. Эквивалентное определение составляет принцип Даламбера—Лагранжа: перемещение $\mathbf{r}(t)$ есть движение тогда и только тогда, когда для любого касательного к кривой вектора $\boldsymbol{\tau}$ в точке $\mathbf{r}(t)$

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (4.2)$$

Вместо (1) можно написать уравнения с множителем Лагранжа:

$$m\ddot{x} = X + \kappa \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$m\ddot{y} = Y + \kappa \frac{\partial f}{\partial y};$$

к этой системе надо присоединить уравнение $f(x, y) = 0$, и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями времени $x(t)$, $y(t)$, $\kappa(t)$. Движение не изменится, если к $\mathbf{F}$ прибавить некоторую силу, ортогональную к кривой.

Разложив векторное равенство (1) по векторам естественного репера, можно найти формулу движения $s = s(t)$ из уравнения

$$m\ddot{s} = F_\tau(\dot{s}, s, t), \quad (4.3)$$

а потом вычислить силу реакции из

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_v + R \quad (R = R\mathbf{e}_v). \quad (4.4)$$

Заметим, что, даже не решая уравнение (3), R всегда можно вычислить как функцию состояния: $R = -F_v + \frac{mv^2}{\rho}$ (зависимость от скорости квадратичная, если $F_v = F_v(s)$).

ЕСЛИ СИЛА ПОТЕНЦИАЛЬНА, имеется интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + V = h \quad (4.5)$$

как для свободных движений в плоскости, так и для движения при наличии связи. В последнем случае V обозначает сужение потенциала $V(x, y)$ на кривую: $V(s) = V(x(s), y(s))$. Тогда

$$F_\tau(s) = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_\tau) = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{dV}{ds}.$$

Реакция вычисляется как функция энергии и положения:

$$R^h(s) = -F_v(s) + \frac{2}{\rho}(h - V(s)).$$

Задача 5. Рассмотрим движение точки, подвешенной на нити. Начальное условие: точка находится в крайнем нижнем положении, начальная скорость горизонтальна и по модулю равна v_0 . Определить границы возможности движения.

Это задача на движение с односторонней связью $x^2 + y^2 - r^2 \leq 0$ (r — длина нити). Другими словами, нить не может порваться, но может ослабнуть. Граница возможности движения определяется следующими условиями:

- либо скорость обратится в нуль и точка пойдет назад;
- либо тем, что ослабнет нить и точка покинет окружность.

Иначе говоря, надо выписать и решить два неравенства:

$$(*) V \leq h, (**) R_h \geq 0,$$

где h определяется начальными условиями. Имеем: радиус кривизны $\rho = r$, натуральный параметр $s = r\varphi$ (рис. 5). Ответ:

1) если $v_0 \leq \sqrt{2gr}$, то неравенство $(*)$ сильнее, чем $(**)$: в результате будут колебания в нижней полуокружности;

2) если $v_0 \in (\sqrt{2gr}, \sqrt{5gr})$, то $(**)$ сильнее, чем $(*)$, т. е. нить ослабнет в верхней полуокружности;

3) если $v_0 > \sqrt{5gr}$, то получим вращение точки по окружности.

Вопрос. Что будет при $v_0 = \sqrt{5gr}$?

Задача 6. Выписать и решить уравнение $m\ddot{s} = F_\tau(s)$ для движения точки в поле силы тяжести по циклоиде (рис. 29):

$$x = \frac{a}{2}(\varphi + \sin \varphi), \quad y = -\frac{a}{2}(1 + \cos \varphi).$$

Ответ: $\ddot{s} = -g/2a$ (гармонические колебания).

УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА. Пусть $q(t)$ — закон движения точки по кривой $r(q)$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad A(q) = m \left(\left(\frac{dx}{dq} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dq} \right)^2 \right) = m \left(\frac{ds}{dq} \right)^2.$$

Пусть поле силы F потенциально, вдоль кривой потенциал $V(q) = V(x(q), y(q))$. Составим функцию Лагранжа

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 - V(q) \quad (4.6)$$

и предложим своему вниманию осколок общей теории (см. § 16).

Теорема. Зависимость $q = q(t)$ для движения по кривой в потенциальном поле сил удовлетворяет уравнению Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (4.7)$$

Имеет место интеграл энергии

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 + V(q). \quad (4.8)$$

Доказательство. На левую часть (7) надо смотреть, как на процедуру выписывания некоторого дифференциального уравнения второго порядка, а именно (после выкладок в случае (6)) такого:

$$A(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} A'(q) \dot{q}^2 + V'(q) = 0. \quad (4.9)$$

Это уравнение эквивалентно $m\ddot{s} = F_\tau$, поскольку

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{A(q)}{m}} \dot{q}, \quad \ddot{s} = \frac{A'(q) \dot{q}^2}{2\sqrt{mA(q)}} + \sqrt{\frac{A(q)}{m}} \ddot{q}, \quad F_\tau = -\sqrt{\frac{m}{A(q)}} \frac{dV}{dq}.$$

Уже известный факт существования интеграла энергии ((8) есть (5), выраженное через $\dot{q}$, q) можно получить заново ((9), умноженное на $\dot{q}$, есть dH/dt). Отметим, что интеграл энергии H отличается от лагранжиана L знаком перед $V(q)$.

ОКРЕСТНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. Точка q_0 называется положением равновесия, если движение с начальным состоянием q_0 , $\dot{q}_0=0$ имеет вид $q(t) \equiv q_0$.

Л е м м а. Точка q_0 — положение равновесия тогда и только тогда, когда $V'(q_0)=0$, т. е. q_0 — критическая точка, см. (9).

Не уменьшая общности, можно считать $q_0=0$. Осуществим линеаризацию уравнения Лагранжа. Для простоты сделаем это не строго (но правильно). Будем считать, что функции $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ малы одновременно, а их квадратами, попарными произведениями (и так далее) можно пренебречь. Тогда средний член в (9) отбросится сразу, а с учетом разложений Тейлора

$$A(q) = A(0) + \alpha(q)q, \quad V'(q) = V''(0)q + \beta(q)q^2,$$

получим линеаризованное уравнение в виде

$$A(0)\ddot{q} + V''(0)q = 0. \quad (4.10)$$

Если $V''(0) > 0$, т. е. V имеет минимум в положении равновесия, то

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{A(0)}}.$$

Это — «малые колебания» с частотой ω .

Если $V''(0) < 0$, т. е. V имеет максимум, то

$$q(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \sqrt{-\frac{V''(0)}{A(0)}}.$$

Это — «экспоненциальный уход» с показателем λ .

Если $V''(0) = 0$, то первое приближение не представляет ценности и не позволяет судить о поведении точных решений уравнений Лагранжа (ср. с теоремами о линеаризации в курсе дифференциальных уравнений).

Задача 7. Доказать, что частота малых колебаний в окрестности нижней точки вертикальной кривой (в поле силы тяжести) равна $\sqrt{g/\rho}$, где ρ — радиус кривизны кривой в этой точке.

§ 5. ДВИЖЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Двумерное подмногообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$ можно задать двумя локально эквивалентными способами:

1) уравнением: $\mathfrak{M} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$, причем

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq 0 \Big|_{\mathfrak{M}};$$

2) параметрически: $\mathfrak{M} = \{x = x^*(q_1, q_2), y = y^*(q_1, q_2), z = z^*(q_1,$

$q_2\}$, причем

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial q_1} & \frac{\partial y^*}{\partial q_1} & \frac{\partial z^*}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x^*}{\partial q_2} & \frac{\partial y^*}{\partial q_2} & \frac{\partial z^*}{\partial q_2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathfrak{M}} = 2.$$

Перемещение по поверхности задается либо тремя функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, удовлетворяющими связи: $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$, либо двумя функциями $q_1(t)$, $q_2(t)$, тогда $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^*(q_1(t), q_2(t))$. Соответственно скорость $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}(t)} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}(t)} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}(t)} \dot{z} = 0$$

или же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \dot{q}_2;$$

векторы $\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_i}$ составляют базис плоскости $T_{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$, касательной к $\mathfrak{M}$ в точке $\mathbf{r}$. Поверхность $\mathfrak{M}$ называется *многообразием положений*, а множество всех возможных пар $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ при перемещении по $\mathfrak{M}$ — *многообразием состояний*:

$$T(\mathfrak{M}) = \{(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})\} = \left\{ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z : f(x, y, z) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^6.$$

Пространство $\mathbb{R}^6(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$ — многообразие состояний свободной точки.

Единичную нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности $\mathfrak{M}$ также можно задать двумя способами:

$$1) \mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}; \quad 2) \mathbf{n}(q_1, q_2) = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right]}{\left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right] \right|}.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ приложен в точке $\mathbf{r} \in \mathfrak{M}$, то пусть

$$\mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a}, \mathbf{n})$$

его нормальная компонента (число),

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{n}$$

его касательная компонента (вектор).

Евклидова структура в $\mathbb{R}^3$ индуцирует положительно определенное скалярное произведение векторов каждого касательного пространства $T_{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$. Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{v} = v_1 \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}, \quad \mathbf{w} = w_1 \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} + w_2 \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$$

вычисляется по формуле

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = E v_1 w_1 + F (w_2 v_1 + v_2 w_1) + G v_2 w_2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} \right), \quad F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right), \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right).$$

Если заданы $q_1(t)$, $q_2(t)$, то вектор скорости имеет квадрат модуля:

$$v^2 = E \dot{q}_1^2 + 2F \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G \dot{q}_2^2 = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Получившаяся квадратичная форма называется первой квадратичной формой поверхности. Значение второй квадратичной формы как функции вектора скорости перемещения $\mathbf{r}(t)$ по определению равно $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — нормаль. Так как

$$(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) - (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{n}}), \quad (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) \equiv 0,$$

то $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) = -(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{n}})$. Но $\dot{\mathbf{n}}$ — линейная форма по скоростям, так что $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n})$ — действительно корректно определенная квадратичная форма; обозначим ее $((\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}))$. Легко получаются формулы

$$((\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial x} & \frac{\partial n_x}{\partial y} & \frac{\partial n_x}{\partial z} \\ \frac{\partial n_y}{\partial x} & \frac{\partial n_y}{\partial y} & \frac{\partial n_y}{\partial z} \\ \frac{\partial n_z}{\partial x} & \frac{\partial n_z}{\partial y} & \frac{\partial n_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$L = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2}, \mathbf{n} \right), \quad M = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_2}, \mathbf{n} \right), \quad N = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2^2}, \mathbf{n} \right).$$

Величины L, M, N суть функции точки на $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ. Задана поверхность $\mathfrak{M}$ и сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$. Следующие определения движения эквивалентны. Функция $\mathbf{r}(t)$ называется движением, если удовлетворяются условие $f(\mathbf{r}(t)) \equiv 0$ и

О1) принцип д'Аламбера—Лагранжа: $(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}, \delta_{\mathbf{r}}) = 0$, где $\delta_{\mathbf{r}}$ — произвольный касательный вектор в точке $\mathbf{r}(t)$;

О2) закон Ньютона и условие идеальности связи:

а) $m\mathbf{r} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — так называемая сила реакции связи, удерживающая точку на поверхности,

б) реакция $\mathbf{R}$ ортогональна поверхности;

О3) внутреннее уравнение движения:

$$m a = F_{\mathbf{v}};$$

О4) принцип Гаусса: все кривые $\mathbf{r}(t)$, удовлетворяющие условию связи, т. е. «перемещения», будем, по Гауссу, называть «мыс-

лимые движения»; чтобы из них выделить истинные, рассмотрим все такие мыслимые движения, которые при данном t имеют одинаковые состояния $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$; тогда все мыслимые ускорения $\mathbf{r}$ за-
мечают плоскость, ортогональную $\mathbf{p}$; если убрать связь, то вектор $\mathbf{F}/m$ будет ускорением освобожденного движения (из закона Ньютона); по Гауссу, истинным является то ускорение из мысли-
мых, квадратичное отклонение которого от освобожденного ми-
нимально, т. е. величина $|\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}/m|^2$ принимает наименьшее зна-
чение.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что ускорение $\mathbf{a}_\nabla$ в репере $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}$ имеет компоненты

$$a_1 = \ddot{q}_1 + \Sigma \Gamma_{ij}^1 \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$a_2 = \ddot{q}_2 + \Sigma \Gamma_{ij}^2 \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где Γ_{ij}^k выражаются через E, F, G и их производные по q_1, q_2 . Это значит, что если поверхность подвергнуть такой деформации с параметром α ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(q_1, q_2, \alpha),$$

при которой коэффициенты E, F, G не меняются, а также не ме-
няются компоненты касательного поля сил

$$\mathbf{F}_\nabla = F_1(q_1, q_2) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} + F_2(q_1, q_2) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2},$$

то движения будут задаваться одними и теми же зависимостями $q_1(t), q_2(t)$. Выражение «внутреннее уравнение движения», таким образом, вполне созвучно термину «внутренняя геометрия поверх-
ности» в дифференциальной геометрии.

Данные ранее определения первого интеграла, области воз-
можности движения, множества достижимости дословно перено-
сятся на движение по поверхности и имеют «внутренний» смысл.
Это не мешает нам в ходе исследований опираться не только на
внутренний закон Ньютона, но и на «внешнюю» систему уравне-
ний движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + \kappa \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = Y + \kappa \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = Z + \kappa \frac{\partial f}{\partial z}, \\ f(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

вытекающую из O2. Коэффициент κ легко вычислить как функ-
цию состояния, при $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ квадратичную по скоростям:

$$|\text{grad } f| \kappa = -F_\perp - m((\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})).$$

Уравнениями вида (1) можно пользоваться и тогда, когда $\dot{f} = \dot{f}(x, y, z, t)$, т. е. связь явно зависит от времени.

ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ. По аналогии с § 1 имеем:

А) *интеграл импульса вдоль оси x :*

$$X = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \Rightarrow J_1 = m\dot{x} = \text{const};$$

Б) *интеграл кинетического момента относительно оси Oz :*

$$xY - yX \equiv 0, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \Rightarrow J_2 = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = \text{const}$$

(выводится из теоремы об изменении момента из § 3);

В) *интеграл энергии:*

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow H = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = h = \text{const}.$$

Здесь и всегда потенциал V не зависит от времени.

Задача 8. Точка m движется по горизонтальному цилиндру $\mathfrak{M} = \{y^2 + z^2 - r^2 = 0\}$ в поле силы тяжести; $V = mgz$. Здесь есть интеграл импульса и энергии:

$$J_1 = m\dot{x} = c, \quad H = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy = h.$$

Найти область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$.

Задача 9. Точка m движется по вертикальному цилиндру $\mathfrak{M} = \{x^2 + y^2 - r^2 = 0\}$ в поле силы тяжести; есть интегралы момента относительно оси z и энергии. Определить область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$ и множество достижимости $A_{v_0}(\mathbf{r}_0)$ (использовать внутреннее уравнение движения).

Задача 10. Точка единичной массы находится на эллипсоиде $\mathfrak{M} = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1\}$ и движется по инерции ($\mathbf{F} \equiv 0$), так что траектория движения является геодезической линией. Интеграл энергии $H = 1/2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Доказать, что имеется еще квадратичный по скоростям интеграл

$$\Phi = \frac{1}{2} (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) (A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + C\dot{z}^2),$$

и что в уравнениях движения (1) множитель Лагранжа

$$\kappa = -\frac{1}{2} \frac{A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + C\dot{z}^2}{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. Пусть сила $\mathbf{F}$ потенциальна, так что

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \kappa \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (5.2)$$

$$m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = \kappa \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Теорема. В координатах на поверхности $\mathfrak{M}$ функции $q_1(t)$, $q_2(t)$ задают движение тогда и только тогда, когда являются решениями системы уравнений Лагранжа, получаемых по формулам

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad (5.3)$$

где функция Лагранжа (лагранжиан)

$$L = T - V = \frac{m}{2} (E\dot{q}_1^2 + 2F\dot{q}_1\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2) - V(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)). \quad (5.4)$$

Интеграл энергии $H = T + V$ отличается от L знаком перед V .

Доказательство. Уравнения (5.2) умножим соответственно на $\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q_i}, \frac{\partial \dot{y}^*}{\partial q_i}, \frac{\partial \dot{z}^*}{\partial q_i}$ и сложим. Справа получим нуль, а слева

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} = \\ = \frac{d}{dt} m \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - m \left[\dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \right. \\ \left. + \dot{z} \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial V}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i},$$

и аналогично для остальных координат. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q_i} m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \\ = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - V \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - V \right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Функция Лагранжа L определена инвариантно, глобально, т. е. не зависит от выбора локальных координат на поверхности. Если $\mathbf{r} \in \mathfrak{M}$, а скорость $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$, то $L = m\mathbf{v}^2/2 - V(\mathbf{r})$ зависит от состояния и только. Из этого вытекает, что мы имеем право

по нашему усмотрению заменять координаты в выражении L ; если

$$q_i = q_i(\xi_1, \xi_2),$$

то

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2,$$

и, внося эти выражения в $L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2)$, получим новое аналитическое выражение $L(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \xi_1, \xi_2)$ и новые уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0,$$

равносильные уравнениям (3).

Виреде в (4) заменим mE на E , mF на F и mG на G .

§ 6. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Пусть $\gamma_0(t) = (q_1(t), q_2(t))$, $t \in [\bar{t}, \bar{t}]$ — некоторое движение из точки a в точку b на поверхности $\mathfrak{M}$. Выделим эту кривую среди множества других кривых $\gamma: [\bar{t}, \bar{t}] \rightarrow \mathfrak{M}$, концы которых суть те же точки.

Теорема. Движение $\gamma_0(t)$ есть экстремаль функционала

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}} L(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), q_1(t), q_2(t)) dt = \mathcal{L}[\gamma(t)].$$

т. е. вариация $\delta \mathcal{L} = 0$ на движении $\gamma_0(t)$ (принцип Гамильтона).

Разъяснения. I. Здесь не используется конкретная структура лагранжиана, а важно лишь то, что движение удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

II. *Вариацией* кривой $\gamma_0(t)$ называется всякое семейство кривых $\gamma_\alpha(t) = \gamma(t, \alpha)$, $\alpha \in (-\epsilon, +\epsilon)$, такое, что

$$а) \gamma(\bar{t}, \alpha) \equiv a, \gamma(\bar{t}, \alpha) \equiv b;$$

$$б) \gamma(t, 0) \equiv \gamma_0.$$

III. Для отдельно взятой вариации получаем функцию

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} L(\dot{\gamma}_\alpha(t), \gamma_\alpha(t)) dt,$$

свою для каждой вариации.

IV. Условие $\delta \int L dt = 0$ означает по определению, что для любой вариации

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Доказательство теоремы (точнее, лишь основная идея).
Вычислим

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \int \left(\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right) dt.$$

Но $q_i = q_i(\alpha, t)/dt$, так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} &= \int \left(\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial^2 q_i}{\partial t \partial \alpha} \right) dt = \sum \int \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt + \\ &+ \sum \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \end{aligned}$$

(интегрируем по частям)

$$= \sum \int \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\frac{\bar{t}}{t}} =$$

(так как $\gamma(\bar{t}, \alpha) = a$, $\gamma(\bar{t}, \alpha) = b$)

$$= \sum \int_{\frac{\bar{t}}{t}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\gamma} dt = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ — фактически произвольные функции t , нулю должны быть равны множители при них, т. е. должны выполняться уравнения Лагранжа (они называются уравнениями Эйлера—Лагранжа рассматриваемой вариационной задачи).

ПРИНЦИП ЯКОБИ. Теперь используем структуру лагранжиана:

$$\widehat{L} = \frac{1}{2} (E\dot{q}_1^2 + 2F\dot{q}_1\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2) - \check{V} = \check{T} - \check{V},$$

и факт наличия интеграла энергии:

$$K = T + V = h.$$

Пусть произвольно зафиксирована область возможности движения $\mathfrak{M}^h = \{V \leq h\}$. Наряду с исходной римановой метрикой:

$$dl^2 = E dq_1^2 + 2F dq_1 dq_2 + G dq_2^2$$

в области $V < h$ введем метрику Якоби:

$$ds = \sqrt{2(h - V)} dl.$$

Теорема (принцип Якоби). Траектории движения с энергией h суть геодезические метрики ds в области $\{V < h\}$.

Разъяснения. I. Рассматривается функционал длины в метрике Якоби. А именно если $\gamma(t)$ — кривая на $\mathfrak{M}$, то ее длина

$$s[\gamma] = \int_{\frac{\bar{t}}{t}}^{\bar{t}} \sqrt{2(h - V(q))} \sqrt{E\dot{q}_1^2 + 2F\dot{q}_1\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2} dt. \quad (6.1)$$

II. Значение функционала длины не зависит от параметризации кривой: если имеется замена переменной $t = t(\tau)$ и $\gamma(\tau) = \gamma(t(\tau))$, то $s[\gamma] = s[\gamma]$ (для доказательства надо выполнить замену в интеграле (1)).

III. Геодезические можно трактовать как экстремали функционала длины: кривая γ_0 — геодезическая, если для любой вариации вида:

$$\gamma_\alpha(t) = \gamma(t, \alpha), \quad \gamma(t, 0) \equiv \gamma_0(t),$$

$$\gamma_\alpha : [\bar{t}(\alpha), \bar{\bar{t}}(\alpha)], \quad \gamma_\alpha \in \{V < h\},$$

$$\gamma_\alpha(\bar{t}) = a, \quad \gamma_\alpha(\bar{\bar{t}}) \equiv b,$$

справедливо утверждение

$$\frac{d}{d\alpha} s[\gamma_\alpha] \big|_{\alpha=0} = 0.$$

IV. Обратим внимание на то, что определение вариации иное, нежели в случае принципа Гамильтона. А именно интервал определения $(\bar{t}(\alpha), \bar{\bar{t}}(\alpha))$ уже необязательно постоянен. Формально здесь класс вариаций шире, но это расширение несущественно в силу II.

Доказательство теоремы. Поскольку значение функционала длины не зависит от параметризации, мы имеем право принять, что вдоль варьируемой кривой имеет место «интеграл энергии»:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + V = h \quad (6.2)$$

и что у варьируемых кривых интервал определения тот же самый. Поскольку вся кривая $\gamma_0(t) \in \{V < h\}$, выполнено неравенство

$$V(\gamma_0(t)) < h - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 > \varepsilon.$$

Поэтому при всякой вариации γ_α при достаточно малых α выполнены неравенства:

$$V(\gamma_\alpha(t)) < h - \varepsilon/2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 > \varepsilon/2,$$

подинтегральное выражение $\Phi(\dot{q}, q)$ в (1) не обращается в нуль и потому не теряет гладкости.

Таким образом, кривая $\gamma_0(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда вдоль нее выполнено тождество (2) и она является экстремалью функционала (1) в смысле принципа Гамильтона. Выпишем уравнения Эйлера—Лагранжа для этого функционала:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \frac{\sqrt{2(h-V)}}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} &= -\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{2(h-V)}} \frac{\partial V}{\partial q_i} + \sqrt{\frac{2(h-V)}{2T}} \frac{\partial T}{\partial q_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} &= \left(\frac{d}{dt} \sqrt{\frac{h-V}{T}} \right) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sqrt{\frac{h-V}{T}} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \\ &- \sqrt{\frac{h-V}{T}} \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sqrt{\frac{T}{h-V}} \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\end{aligned}$$

(учитывая, что $\sqrt{\frac{h-V}{T}} \equiv 1$), где $L = T - V$. Теорема доказана.

Принцип Якоби позволяет пользоваться различного рода фактами из римановой геометрии, например:

А. Пусть имеется точка a на римановом многообразии $\mathfrak{M}$ с метрикой dl . Тогда для всех точек b , достаточно близких к a , существует геодезическая, идущая из a в b , причем длина ее будет минимальной в классе всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Б. На компактном связном римановом многообразии любые две точки можно соединить геодезической.

Заметим, что множество $\{V < h\}$, несмотря на свой «открытый» вид, может быть компактным многообразием. А именно если само $\mathfrak{M}$ компактно и $h > \max V$, то $\{V < h\} = \mathfrak{M}$.

В этой ситуации не составляет труда «применить к механике» множество теорем о геодезических на компактных многообразиях, на чем останавливаться мы не будем, так как на этом пути игнорируется характерная, интересная и неудобная в обращении особенность метрики Якоби: если область возможности движения $\mathfrak{M}^h$ имеет непустую границу, то на ней коэффициент $\sqrt{2(h-V)}$ обращается в нуль, так что метрика Якоби ds полностью вырождается. Но это не мешает движению дойти до границы, так что просто исключить ее из рассмотрения невозможно.

Задача 11. Показать на примерах, что из-за вырождения метрики Якоби на границе даже в случае компактного $\mathfrak{M}^h$ неверно, что любые две точки можно соединить геодезической.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ЯКОБИ. Ниже будем предполагать, что на $\{V = h\}$ нет критических точек функции V ; следовательно, граница — гладкое подмногообразие. Область $\mathfrak{M}^h$ для простоты считаем связной.

Лемма 1. Если некоторое движение пришло на границу, то назад оно уйдет по той же траектории.

В самом деле, если $\gamma(t)$ — движение, то $\gamma(-t)$ — движение. Пусть при $t=0$ движение оказалось на границе: $\gamma(0) \in \{V=h\}$, т. е. скорость $v=0$. Тогда $\gamma(t)$, $\gamma(-t)$ имеют одинаковые начальные состояния и по теореме единственности совпадают.

Следствие. Если некоторое движение имеет с границей две общие точки, то это движение периодическое в силу леммы 1; оно называется *либрацией*.

Первая теорема Козлова (без доказательства). Если граница компактной ОВД $\mathcal{M}^h$ имеет n компонент связности, то существует $n-1$ либрация (рис. 59).

Определение. Рассмотрим всевозможные кривые:

$$\gamma: [\bar{t}, \bar{t}] \rightarrow \mathcal{M}^h$$

и введем обозначения:

$$\Omega_{ab} = \{\gamma: \gamma(\bar{t}) = a, \gamma(\bar{t}) = b\},$$

$$\Omega_a = \{\gamma: \gamma(\bar{t}) = a, \gamma(\bar{t}) \in \{V=h\}\}. \quad (6.3)$$

Величина $\delta(a, b) = \inf_{\gamma \in \Omega_{ab}} s(\gamma)$ называется *расстоянием между двумя точками a и b* ; величина $\delta(a) = \inf_{\gamma \in \Omega_a} s(\gamma)$ — *расстоянием от точки a до границы*.

Расстояние между двумя точками на одной связной компоненте границы равно 0; аксиомы метрического пространства выполняются только внутри $\mathcal{M}^h$.

Лемма 2. Имеют место неравенства:

- (а) $\delta(a, b) \leq \delta(a, c) + \delta(b, c)$;
- (б) $\delta(a, b) \leq \delta(a) + \delta(b)$, если граница связна;
- (в) $\delta(a) \leq \delta(a, b) + \delta(b)$.

Докажем (б). Возьмем две точки a и b . Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные кривые, которые идут до границы и достигают ее в точках C_1, C_2 . Тогда

$$\delta(a) + \delta(b) = \inf (s(\gamma_1) + s(\gamma_2)).$$

Чтобы оценить $\delta(a, b)$, рассмотрим кривые вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (где γ_3 — участок границы от C_1 до C_2). Получим $\delta(a, b) \leq \inf s(\gamma) = \delta(a) + \delta(b)$, поскольку $s(\gamma_3) = 0$.

Доказательство (а) следует из определения расстояния между двумя точками и свойств точной нижней грани.

Доказательство (в) оставляется в качестве упражнения.

Лемма 3 (без доказательства). Существует η -окрестность границы (в смысле метрики Якоби) такая, что если выпустить траектории от границы с начальной скоростью $v=0$, то они не пересекутся, т. е. они взаимно-однозначно отображают множество $\{V=h\}$ на границу его η -окрестности.

Вторая теорема Козлова (рис. 59). Пусть у нас есть внутренняя точка a и вычислено $\delta(a)$. Тогда существует движение γ_0 , выходящее на границу (т. е. $\gamma_0 \in \Omega_a$) и такое, что его длина в метрике Якоби равна $\delta(a)$ (иначе говоря, из любой точки всегда можно попасть на границу, причем по кратчайшей кривой).

Доказательство. 1. Будем исходить из следующей основной конструкции. Построим сферу (окружность) Σ_ϵ с центром в точке a и малым радиусом ϵ в метрике Якоби. Возьмем точку

$b \in \Sigma_\epsilon$ такую, что для всех $c \in \Sigma$ будет $\delta(c) \geq \delta(b)$. Рассмотрим геодезическую $\gamma_a(s)$, соединяющую точки a и b , продолженную максимально за точку b и параметризованную длиной дуги s (она и будет искомой кривой γ_0).

2. Чтобы найти $\delta(a)$, надо определить $\inf$ длин всех кривых, выходящих на границу из точки a ; все они пересекут нашу окружность (сферу) Σ_ϵ . Участок кривой от a до точки c последнего пересечения ее с Σ_ϵ можно заменить на более короткий участок геодезической, соединяющей a с c , длина которого ϵ , а $\inf$ длины оставшегося участка равен $\delta(c)$. Отсюда замечание:

$$\delta(a) = \min_{c \in \Sigma_\epsilon} \delta(\epsilon + \delta(c)) = \epsilon + \delta(b). \quad (6.4)$$

3. Утверждение: кривая $\gamma_a(\epsilon)$ определена как минимум на интервале $[0, \delta(a))$, и при этом

$$\delta(\gamma_a(s)) = \delta(a) - s, \quad (6.5)$$

при $s \in [\epsilon, \delta(a))$.

Применим «непрерывную индукцию». Кривая $\gamma_a(s)$ определена на открытом интервале, содержащем точку ϵ , и при этом $\delta(\gamma(\epsilon)) = \delta(a) - \epsilon$ согласно замечанию. Равенство (5) выполняется на некотором замкнутом интервале; пусть s_1 — его верхняя граница. Покажем, что равенство (5) окажется справедливым при некотором $s_2 > s_1$, что приведет нас к противоречию. Для этого применим снова основную конструкцию к точке $a_1 = \gamma(s_1)$. В силу замечания

$$\delta(\gamma_{a_1}(\epsilon)) = \delta(b_1) = \delta(a_1) - \epsilon = \delta(a) - s_1 - \epsilon_1 = \delta(a) - (s_1 + \epsilon_1),$$

а в силу леммы 2 (в)

$$\delta(a, b_1) \geq \delta(a) - \delta(b_1) = s_1 + \epsilon_1.$$

С другой стороны, по лемме 2 (а)

$$\delta(a, b_1) \leq \delta(a, a_1) + \delta(a_1, b_1) = s_1 + \epsilon_1.$$

Следовательно,

$$\delta(a, b_1) = s_1 + \epsilon_1.$$

Это означает, что геодезическая γ_{a_1} есть продолжение геодезической γ_a , т. е. угол $\angle aa_1b_1 = \pi$ (в противном случае две точки вблизи излома можно было бы соединить более короткой геодезической). Равенство (4) переписывается в виде

$$\delta(\gamma_a(s_1 + \epsilon)) = \delta(a) - (s_1 + \epsilon_1),$$

т. е. $s_2 = s_1 + \epsilon$ и есть искомое. Итак, равенство (5) выполнено на всем интервале определения $[0, \bar{s})$. Если $\bar{s} < \delta(a)$, то возьмем точку $\bar{a} = \lim_{\gamma \rightarrow \bar{s}} \gamma_a(s)$. По непрерывности получаем $\delta(\bar{a}) = \delta(a) - \bar{s}$, при-

менив к a основную конструкцию, продолжим γ_a дальше.

Утверждение доказано. Из него вытекает, что геодезическая γ_a попадает в η -окрестность границы из леммы 3.

4. Точка $\gamma_a(\delta(a) - \eta)$ лежит на границе η -окрестности. Геодезическая, соединяющая ее с множеством $\{V = h\}$ по лемме 3,

является продолжением γ_a (повторить рассуждение насчет угла, равного π). Следовательно, сама $\gamma_a(s)$ выходит на границу при $s=\delta(a)$. Теорема доказана.

Третья теорема Козлова. Если $\delta(a)+\delta(b)>\delta(a, b)$, то существует движение из a в b . Это аналогично второй теореме.

§ 7. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Начнем выписывать уравнения движения по поверхности $\mathfrak{M}$, опираясь на последнюю теорему § 5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= E\dot{q}_1 + F\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = E\ddot{q}_1 + F\ddot{q}_2 + \dots, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= F\dot{q}_1 + G\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = F\ddot{q}_1 + G\ddot{q}_2 + \dots, \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} + \dots, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} + \dots,\end{aligned}$$

где многоточием обозначены выражения, квадратичные по $\dot{q}_1, \dot{q}_2$. Итак, уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned}E\ddot{q}_1 + F\ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= 0, \\ F\ddot{q}_1 + G\ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Определение. Точка q_1^*, q_2^* называется *положением равновесия*, если среди движений имеется такое: $q_1(t) \equiv q_1^*, q_2(t) \equiv q_2^*$.

Из выписанных нами уравнений видно, что равновесие возможно в тех и только тех точках, в которых $\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$.

Другими словами, *положения равновесия* — это критические точки потенциала V , полученного из потенциала $V(x, y, z)$ сужением на поверхность.

Определение. Положение равновесия q^* называется *устойчивым*, если для любой окрестности $\mathcal{D}$ точки q^* можно указать меньшую окрестность $\mathcal{D}'$ и такое число $\varepsilon > 0$, что если $q_1^0, q_2^0 \in \mathcal{D}'$ и $|v^0| < \varepsilon$, то соответствующее движение не выходит из $\mathcal{D}$.

Теорема Лагранжа — Дирихле. Если точка q^* — строгий локальный минимум функции $\tilde{V}$, то это положение равновесия устойчиво.

Доказательство. Пусть $V(q^*)=0$ для определенности, $\mathcal{D}$ — произвольная область, содержащая q^* . Существует ее подобласть $\mathcal{D}_0$, с границей $\partial\mathcal{D}_0$ такая, что $\eta = \min_{\partial\mathcal{D}_0} V > 0$ (положи-

тельности η можно добиться, уменьшая $\mathcal{D}_0$, так как, по условию, q^* — строгий минимум V). Функция V непрерывна, так что существует подобласть $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_0$ такая, что для всех $q_0 \in \mathcal{D}'$ выполняется неравенство $0 \leq V(q_0) < \eta/2$. Положим $\varepsilon = \sqrt{\eta/m}$. Пусть $q_0 \in \mathcal{D}'$, $|v_0| < \varepsilon$. Тогда

$$h = mv^2/2 + V(q_0) < m\varepsilon^2/2 + \eta/2 = \eta,$$

т. е. движение происходит с энергией $h < \eta$; следовательно, выйти из $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ оно не может.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА. Можно доказать обратное утверждение (о неустойчивости), предполагая невырожденность критической точки q^* , не являющейся минимумом.

Невырожденность означает, что определитель матрицы Гесса

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}_{q^*} \neq 0.$$

Это ситуация общего положения. Пусть $q^* = (0, 0)$ для простоты. Уравнения первого приближения будут (ср. с выводом (4.10)):

$$A \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7.2)$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)}, \quad B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)}.$$

Уравнения (2) имеют лагранжев вид с лагранжианом

$$L_0 = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \Sigma b_{ij} q_i q_j. \quad (7.3)$$

Матрица A есть матрица коэффициентов сужения евклидовой метрики на касательную плоскость $T_0(\mathcal{M})$, вычисленная в репере $\frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2}$. Поэтому функцию L_0 можно рассматривать как лагранжиан некоторого фиктивного движения в касательной плоскости, фиктивного, но в существенных чертах сходного с действительным движением. Воспользуемся теперь нашим правом заменять переменные в лагранжиане (см. конец § 5).

Т е о р е м а. *Существует такая линейная замена:*

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix},$$

что

$$L_0 = \frac{1}{2} \Sigma \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \Sigma \lambda_i x_i^2, \quad (7.4)$$

и уравнения (2) приводятся к виду

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0, \quad (7.5)$$

где переменные разделены.

Для доказательства надо взять матрицу C линейной замены:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

приводящей квадратичные формы (первая из них положительно определена) $\Sigma a_{ij} q_i q_j$, $\Sigma b_{ij} q_i q_j$ к виду Σx_i^2 ; $\Sigma \lambda_i x_i^2$.

Докажем, как строится искомая замена в общем случае, когда эти формы не пропорциональны. На плоскости $R^2(q_1, q_2)$ рассмотрим эллипс

$$Aq \cdot q = \Sigma a_{ij} q_i q_j = 1, \quad (7.6)$$

и переменную кривую второго порядка:

$$Bq \cdot q = \Sigma b_{ij} q_i q_j = C, \quad (7.7)$$

которая ввиду невырожденности матрицы есть, вообще говоря, эллипс или гипербола. Ровно при двух значениях $C = C_1, C_2$ мы будем иметь касание кривой (7) с эллипсом (6) (см. рис. 48, где изображен случай, когда (7) — эллипс; вариант гиперболы изобразить самостоятельно). Отметим на плоскости точки касания и направим в две из них линейно независимые векторы f_1 и f_2 . Тогда, поскольку формальные градиенты левых частей (6) и (7) в точках касания коллинеарны,

$$Bf_i = \lambda_i Af_i, \quad Af_i \cdot f_i = 1. \quad (7.8)$$

Отсюда

$$\det |B - \lambda_i A| = 0,$$

так что λ_i являются корнями одного квадратного уравнения. С другой стороны,

$$C_i = Bf_i \cdot f_i = \lambda_i Af_i \cdot f_i = \lambda_i,$$

так что $\lambda_1 = C_1$, $\lambda_2 = C_2$. Второе из равенств (8) указывает, что модули f_i равны единице в имеющейся евклидовой метрике. Кроме того, эти векторы ортогональны, так как

$$\lambda_1 Af_1 \cdot f_2 = Bf_1 \cdot f_2 = Bf_2 \cdot f_1 = \lambda_2 Af_2 \cdot f_1,$$

откуда $Af_1 \cdot f_2 = 0$. Осталось положить

$$q = x_1 f_1 + x_2 f_2,$$

и тогда

$$Aq \cdot q = x_1^2 + x_2^2, \quad Bq \cdot q = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Задача 12. Систему уравнений (5) решить в зависимости от знаков λ_i (см. конец § 4); установить наличие квадратичных интегралов $\Phi_i = \dot{x}_i^2/2 + \lambda_i x_i^2/2 = C_i$; по аналогии с бигармоническим осциллятором изобразить различные типы траекторий.

З а к л ю ч е н и е. Если среди λ_i есть отрицательные, то $\tilde{V}$ не имеет минимума в точке q^* (будет седло или максимум), а решения линеаризованной системы, вообще говоря, будут экспоненциально уходить (см. § 4), хотя бы по одной из координат x_i . По соответствующим теоремам из теории дифференциальных уравнений это гарантирует неустойчивость решений точной системы и доказывает обращение теоремы Лагранжа—Дирихле в случае невырожденной критической точки.

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (8.1)$$

порожденные функцией

$$L = \frac{1}{2} (E \dot{q}_1^2 + 2F \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G \dot{q}_2^2) - V. \quad (8.2)$$

О п р е д е л е н и е. В системе координат (q_1, q_2) (на $\mathfrak{M}$) координата q_2 называется *игнорируемой* (циклической), если

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \quad (8.3)$$

Тогда из (1) вытекает наличие первого интеграла этих уравнений:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = c, \quad (8.4)$$

который называется *циклическим*, или *кинетическим*. Условие (3) для лагранжиана вида (2) эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial G}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0,$$

а интеграл

$$J = F \dot{q}_1 + G \dot{q}_2 \quad (8.5)$$

получается *линейным по скоростям* $\dot{q}_1, \dot{q}_2$.

ОТ О Б Р А Ж Е Н И Я, С О Х Р А Н Я Ю Щ И Е Л А Г Р А Н Ж И А Н. Рассмотрим семейство отображений многообразия $\mathfrak{M}$ в себя, при которых

$$(q_1, q_2) \rightarrow (q_1, q_2 + s), \quad (8.6)$$

т. е. точка P с координатами (q_1, q_2) переходит в точку P^s с координатами $(q_1, q_2 + s)$ (рис. 46). Если точка P перемещается по закону $P = P(t)$, то ее скорость в рассматриваемой системе координат имеет компоненты $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$. Те же компоненты будут, очевидно, и у скорости точки $P^s(t)$. Поскольку L не зависит от q_2 , можно написать

$$L\left(\frac{dq_1}{dt}; \frac{d}{dt}(q_2 + s), q_1, q_2 + s, t\right) = L\left(\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, q_1, q_2, t\right),$$

или условно

$$L(\dot{P}^s, P^s, t) = L(\dot{P}, P, t).$$

Это и означает сохраняемость лагранжиана. Заметим, что факт сохраняемости L при преобразованиях $P \rightarrow P^s$ не обязательно устанавливать в системе координат, из которых одна — игнорируемая. Лемма об эквивалентности из § 7 позволяет записывать лагранжиан в любой системе координат; при движении по поверхности достаточно проверить, что $|\dot{P}^s|^2 = |\dot{P}|^2$, $V(P^s) = V(P)$, так как лагранжиан дается инвариантной формулой $L = T - V$.

Под эту теорию подпадают, например, системы, рассмотренные в задачах 8 и 9 и вообще интегралы типа А и Б из § 5 и 1. С каждым из них можно ассоциировать некоторое семейство отображений (для типа А это группа сдвигов вдоль оси x , для типа Б — группа поворотов вокруг оси z), при которых сохраняется поверхность (и, следовательно, индуцированная метрика) и потенциал. Например, для того чтобы поверхность $\mathfrak{M} = \{f(x, y, z) = 0\}$ сохранялась группой поворотов (на угол s вокруг оси z):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \end{pmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, z) \equiv f(x, y, z) = 0;$$

дифференцируя по s , получаем (достаточно положить $s=0$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} y - \frac{\partial f}{\partial y} x \equiv 0.$$

Это и есть одно из условий существования интеграла момента.

З а м е ч а н и е об интегрируемости. Наличие двух интегралов движения (интеграла энергии и циклического) в системе с двумя же степенями свободы позволяет решить уравнения движений и проанализировать их качественно. Соответствующие общие теоремы будут даны позднее, а пока приведем пример.

СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. Точка движется по сфере в поле тяжести: $\mathfrak{M} = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. В сферических координатах θ и ψ (рис. 13)

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta, \quad (8.7)$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = T - V =$$

$$= \frac{mr^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) - mgr \cos \theta.$$

Интеграл энергии $H = T + V = mgr h_1$. В выражении L переменная ψ отсутствует. Отсюда

$$J = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} = mr^2 c_1$$

циклический интеграл. Видно, что при $c_1 \neq 0$ функция $\psi(t)$ моно-

тонна. Найдем область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$, для этого включим ψ из интегралов J и H :

$$\frac{mr^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgr \cos \theta = mgr h_1, \quad (8.8)$$

$$\mathfrak{M}_c^h = \left\{ \frac{mr^2}{2} \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + mgr \cos \theta \leq mgr h_1 \right\}.$$

В левой части неравенства стоит так называемый приведенный потенциал, в правой — энергия. Нарисуем график приведенного потенциала V_c (рис. 60). Неравенство $V_c \leq h$ высекает отрезок по θ (который может вырождаться в точку либо пустое множество), а угол ψ — любой. Из (8) вытекает, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{r} (h_1 - \cos \theta) - \frac{c^2}{\sin^2 \theta}}.$$

Подкоренное выражение неотрицательно в точности на $\mathfrak{M}_c^h$. При движении φ растет, а θ колеблется в предписанных заданными c и h пределах. Траектория, вообще говоря, не замкнется. Ситуация здесь очень напоминает ту, которую мы наблюдали в случае центрального поля сил.

Задача 13. Будем задавать траектории движения в виде $\theta(\varphi)$.

1) Доказать, что

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{rc^2} (h_1 - \cos \theta) \sin^4 \theta - \sin^2 \theta}.$$

2) Из уравнения Лагранжа и интегралов получить уравнение 2-го порядка относительно $\theta(\varphi)$ и показать, что оно эквивалентно уравнению вида

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta'} - \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0,$$

где

$$F = \frac{\theta'^2}{2 \sin^4 \theta} - \frac{mr^2}{c^2} V_c(\theta).$$

3) Сделать замену переменных $\chi = \chi(\theta)$, которая приводит к виду $F = \frac{1}{2} \chi'^2 + \dots$

4) Сопоставить эти результаты с формулой (6) и леммой 2 из § 2.

5) Доказать, что траектории не имеют точек перегиба.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА. Мы знаем, что любой линейный интеграл на плоскости имеет один из двух типов А или Б. На поверхности, вообще говоря, это неверно.

Наблюдение. Интегралы типов А и Б на поверхности суть скалярные произведения импульса $m\mathbf{v}$ с полем скоростей $\mathbf{u}$ соответствующей однопараметрической группы. Например, тип Б:

$$\hat{J}_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = (\mathbf{e}_z, m[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]) = (m\dot{\mathbf{r}}, [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}]).$$

■

$$\mathbf{u} = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, поле скоростей группы поворотов

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}.$$

Общее утверждение. Линейный интеграл (4)

$$J = \left(m\dot{\mathbf{r}}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right), \quad (8.9)$$

причем поле $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$ есть поле скоростей при действии (локальной, вообще говоря) группы $\Pi^s: (q_1, q_2) \mapsto (q_1, q_2 + s)$. В самом деле,

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds}(q_1, q_2 + s) = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} = \mathbf{u},$$

а с учетом соглашения в конце § 5

$$(m\mathbf{v}, \mathbf{u}) = m \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \dot{q}_2, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2} \right) = (F\dot{q}_1 + G\dot{q}_2) = J,$$

что и требовалось.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИГНОРИРУЕМОЙ КООРДИНАТЫ. Изложенная выше концепция циклических интегралов и доказываемая ниже теорема без труда обобщаются на многомерный случай, т. е. на произвольные механические системы, которые будут рассматриваться гораздо позднее.

Теорема. Пусть имеется интеграл движения $J \neq 0$, линейный по скоростям в системе координат (ξ_1, ξ_2) на $\mathfrak{M}$. Тогда на $\mathfrak{M}$ существует система координат (q_1, q_2) , в которой q_2 — циклическая и $J = \partial L / \partial \dot{q}_2$.

Доказательство. Пусть в «плохих» координатах ξ_1, ξ_2

$$J = (a_1 \dot{\xi}_1 + a_2 \dot{\xi}_2), \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0,$$

$$L = \frac{1}{2} (E \dot{\xi}_1^2 + 2F \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + G \dot{\xi}_2^2) - V.$$

Положим

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} v_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} v_2. \quad (8.10)$$

Лемма 1. Если в новой системе координат $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$, то

эта система — искомая. Действительно, в ней аналогично (10)

$$J = \frac{\partial L}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2} u_2,$$

причем $u_1=0$, $u_2=1$ по предположению.

Л е м м а 2. Если после замены координат $\xi = \xi(q)$

$$u = u_1 \frac{\partial r^*}{\partial q_1} + u_2 \frac{\partial r^*}{\partial q_2},$$

то по формуле сложной производной

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Заготовив эти опорные утверждения, рассмотрим общее решение системы дифференциальных уравнений $\frac{d\xi_i}{ds} = v_i(\xi)$:

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1(s, \xi_1^0, \xi_2^0), \quad \xi_2 = \bar{\xi}_2(s, \xi_1^0, \xi_2^0).$$

Зафиксируем произвольно ξ_2^0 и положим $q_1 = \xi_1^0$, $q_2 = s$. Это и будут искомые координаты, поскольку

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & v_1 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

откуда $u_1=0$, $u_2=1$.

Вопрос. Почему мы уверены, что матрица $\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)$ невырождена?

З а д а ч а 14. Исходя из интегралов

$$J = m(u, v) = c, \quad K = \frac{m}{2}(v, v) + V = h,$$

доказать, что

$$\mathfrak{M}_c^h = \left\{ \frac{c^2}{2m(u, u)} + V \leq h \right\}.$$

Здесь (u, u) — определенная функция точки $P \in \mathfrak{M}$. Формула

$$V_c = \frac{c^2}{2m(u, u)} + V$$

есть инвариантное представление приведенного потенциала.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. Для дальнейшего напомним некоторые факты из внутренней геометрии поверхностей.

1. Если $\Phi(q_1, q_2)$ — гладкая функция, то ее *внутренний гради-*

ент есть векторное поле $w = \text{Grad } \Phi$ с компонентами

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \end{pmatrix},$$

причем

$$|\text{Grad } \Phi|^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left(G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right)^2 - 2F \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right)^2 \right).$$

Эту функцию обозначим через Φ' . Далее, *внутренней дивергенцией* векторного поля w называется функция

$$\text{Div } w = \frac{1}{Vg} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V\bar{g} w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V\bar{g} w_2) \right],$$

где $g = EG - F^2$. В частности, введем функцию $\Phi'' = \text{Div Grad } \Phi$ — оператор Лапласа от Φ (обычное обозначение $-\Delta(\Phi)$).

З а м е ч а н и е: $\Phi'' \neq (\Phi')'$.

2. Гауссова кривизна многообразия:

$$\Gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

выражается через E, F, G и их производные.

3. Будем говорить, что функции Φ, Ψ *зависимы* ($d\Phi \| d\Psi$), если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

что равносильно $\text{Grad } \Phi \| \text{Grad } \Psi$. Если это свойство выполняется в некоторой области, то по теореме о неявной функции локально $\Phi(q) = f(\Psi(q))$, где $f = f(\chi)$ — некоторая функция одного переменного. Обратное очевидно.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА. Нижеследующие построения являются специфически двумерными. Будет показано, что по коэффициентам E, F, G, V лагранжиана можно определить, есть ли у задачи линейный интеграл. Предполагается, что все рассматриваемые функции — аналитические (если аналитическая функция не равна нулю в одной точке, то ни в какой области она не равна тождественно нулю).

Необходимое условие: функции $V, V', V'', \Gamma, \Gamma', \Gamma''$ зависимы. (В самом деле, пусть q_1 — циклическая координата в системе (q_1, q_2) . Тогда V, E, F, G и их производные суть функции только от q_1 .) Это условие можно проверить в любой системе координат, поскольку функции V и Γ модуль градиента, оператор Лапласа и свойство зависимости не зависят от выбора системы координат.

Если обе функции Γ , V постоянны, то мы имеем движение по инерции либо по сфере, либо по плоскости, либо по плоскости Лобачевского (локально). Такое движение всегда обладает линейным интегралом.

Теорема Бьянки—Синга. Пусть $d\Gamma \parallel dV$, и Φ — та из функций Γ и V , которая не постоянна. Тогда если

$$d\Phi \mid d\Phi', \quad d\Phi \mid d\Phi'',$$

то существует система координат (x_1, x_2) , в которой

$$L = \frac{1}{2} (A(x_1) \dot{x}_1^2 + B(x_1) \dot{x}_2^2) + V(x_1)$$

(таким образом, необходимое условие также и достаточно).

Доказательство. Идея состоит в том, что базисные векторы системы координат направить по вектору $\mathbf{w} = \text{Grad } \Phi$ и ортогонально ему. Начнем с того, что положим

$$x_1 = \Phi(q_1, q_2).$$

Заметим, что вектор с компонентами $-\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}$ ортогонален $\mathbf{w} = \text{Grad } \Phi$. Если он коллинеарен $\text{Grad } \Psi$, то

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, должно быть

$$d\Psi = \mu \sqrt{g} (-w_2 dq_1 + w_1 dq_2),$$

где μ — неизвестный пока интегрирующий множитель. Коэффициент $\sqrt{g}$ добавлен в это равенство для удобства. Условие того, что правая часть есть полный дифференциал, приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (-\mu \sqrt{g} w_2) \equiv \frac{\partial}{\partial q_1} (\mu \sqrt{g} w_1),$$

или $\text{div}(\mu \mathbf{w}) \equiv 0$, или, более подробно,

$$\frac{\partial \mu}{\partial q_1} w_1 + \frac{\partial \mu}{\partial q_2} w_2 + \frac{\mu}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (\sqrt{g} w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sqrt{g} w_2) \right) = 0.$$

Если мы хотим, чтобы было $\mu = \mu(x_1)$, то должно быть

$$\frac{d\mu}{dx_1} \left(w_1 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + w_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (\sqrt{g} w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sqrt{g} w_2) \right) = 0,$$

или

$$\frac{d\mu}{dx_1} \Phi' + \mu \Phi'' = 0.$$

Но в предположениях теоремы $\Phi' = \Phi'(x_1)$, $\Phi'' = \Phi''(x_1)$, так что

$$\mu = e \left[- \int \frac{\Phi''(x_1)}{\Phi'(x_1)} dx_1 \right] = \mu(x_1).$$

Следовательно, коэффициент μ существует и зависит от Φ . Положим $x_2 = \Psi(q_1, q_2)$. Легко увидеть, что

$$dx_1^2 + \frac{dx_2^2}{\mu^2} = \Phi' (Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2),$$

так что в новых координатах

$$L = \frac{1}{\Phi'(x_1)} \left(\dot{x}_1^2 + \frac{\dot{x}_2^2}{\mu^2(x_1)} \right) + V(x_1).$$

Теорема доказана.

§ 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Начнем с движения по плоскости. Закон Ньютона

$$m\ddot{x} = X(x, y), \quad m\ddot{y} = Y(x, y).$$

Пусть налицо квадратичный интеграл движения

$$\Phi = \frac{m}{2} (P\dot{x}^2 + 2Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2) + W(x, y).$$

Тогда его полная производная

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{m}{2} & \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \dot{y} \right) \dot{x}^2 + 2 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \dot{y} \right) \dot{x}\dot{y} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial R}{\partial y} \dot{y} \right) \dot{y}^2 \right] + P\dot{x}X + Q(\dot{x}Y + \dot{y}X) + R\dot{y}Y + \\ & + \frac{\partial W}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y} \dot{y} = 0. \end{aligned}$$

Приведем подобные члены: получается линейная и кубическая формы по $\dot{x}$, $\dot{y}$, коэффициенты которых должны быть равны нулю. Отсюда, во-первых,

$$PX + QY = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$QX + RY = -\frac{\partial W}{\partial y},$$

т. е. потенциально поле

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Во-вторых,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, & \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} + 2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (9.1)$$

Теорема 1. Пусть J — функция, которая по теореме из § 1 может быть линейным интегралом в плоскости, т. е.

$$J(\mathbf{v}) = m(a\dot{x} + b\dot{y}) \quad (9.2A)$$

или

$$J(\mathbf{v}) = m((x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}). \quad (9.2B)$$

Квадратичная часть рассматриваемого интеграла имеет вид

$$\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda J_1(\mathbf{v}) J_2(\mathbf{v}),$$

где κ, λ — постоянные, а J_1, J_2 — две функции вида (2A) или (2B), так что $J_1 J_2$ может быть трех качественно различных типов.

Доказательство. Дифференцируя уравнения системы (1) по x, y , нетрудно показать, что общее решение ее имеет вид

$$P = cy^2 + 2ky + p,$$

$$Q = -cxy - kx - ly - q,$$

$$R = cx^2 + 2lx + r.$$

Если $c \neq 0$, то можно считать, что $c = 1$. Параллельным переносом координат можно добиться того, что $k = l = 0$. Теперь квадратичная часть Φ привелась к

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{1}{2}(p\dot{x}^2 - 2q\dot{x}\dot{y} + r\dot{y}^2). \quad (9.3)$$

Поворотом осей добьемся того, что $q = 0$. Считая $p = r + a^2$, получим вместо (3)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}p(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 - \frac{1}{2}a^2\dot{y}^2 = \\ & = \frac{1}{2}p(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}((x+a)\dot{y} - y\dot{x})((x-a)\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}$$

Это и требовалось.

Упражнение. Случай $c = 0$ разобрать самостоятельно.

ЛИУВИЛЛЕВЫ СИСТЕМЫ. Система двух уравнений Лагранжа называется *лиувиллевой*, если лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(f_1(q_1) + f_2(q_2))(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{V_1(q_1) + V_2(q_2)}{f_1(q_1) + f_2(q_2)}.$$

Теорема 2. Лиувиллева система имеет интеграл:

$$\Phi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)(f_2\dot{q}_1^2 - f_1\dot{q}_2^2) + \frac{f_2V_1 - f_1V_2}{f_1 + f_2} = c, \quad (9.4)$$

независимый с интегралом энергии H .

Доказательство. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

напишем подробнее:

$$\frac{d}{dt} [(f_1 + f_2)\dot{q}_1] - \frac{1}{2}f'_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{V_1 + V_2}{(f_1 + f_2)^2}f'_1 + \frac{V'_1}{f_1 + f_2} = 0.$$

Умножим последнее равенство на $f_1 + f_2$ и $\dot{q}_1$:

$$(f_1 + f_2) \dot{q}_1 \frac{d}{dt} [(f_1 + f_2) \dot{q}_1] - f'_1 K \dot{q}_1 + V'_1 \dot{q}_1 = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} (f_1 + f_2)^2 \dot{q}_1^2 - f_1 K + V_1 \right] = 0.$$

Осталось заметить, что $\Phi = \frac{1}{2} (f_1 + f_2)^2 \dot{q}_1^2 - f_1 K + V_1$. (Оперируя аналогично со вторым уравнением Лагранжа, получим

$$-\Phi = \frac{1}{2} (f_1 + f_2)^2 \dot{q}_2^2 - f_2 K + V_2 = -c.)$$

Следствие. Пусть c, h фиксированы. Тогда область возможности движения

$$\mathfrak{M}_h^c = \{-f_1 h + V_1 \leq c, -f_2 h + V_2 \leq -c\}.$$

Замечание. Система с лагранжианом более общего вида:

$$L = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) (a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2) - \frac{V_1 + V_2}{f_1 + f_2}$$

приводится к лиувиллевой при помощи замены координат:

$$x_1 = \int \sqrt{a_1} dq_1, \quad x_2 = \int \sqrt{a_2} dq_2.$$

В частности, это касается систем с линейным интегралом.

Пример 1. Бигармонический осциллятор:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Пример 2. Движение в центральном поле сил:

$$L = \frac{mr^2}{2} \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \dot{\varphi}^2 \right) - V(r).$$

Пример 3. Движение точки массы $m=1$ в поле с потенциалом:

$$V(x, y) = -\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} + gy,$$

которое есть сумма гравитационного и однородного. Введем параболические координаты по формулам

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2} (v^2 - u^2);$$

тогда

$$\dot{x} = u\dot{v} + v\dot{u}, \quad \dot{y} = v\dot{v} - u\dot{u}, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2,$$

и лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - \frac{\left(\mu - \frac{gv^4}{2} \right) + \left(\mu + \frac{gu^4}{2} \right)}{u^2 + v^2}$$

имеет лиувиллев вид. Второй интеграл по формуле (4)

$$\Phi = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\dot{v}^2 \dot{u}^2 - u^2 \dot{v}^2) - \mu \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} - \frac{g}{2} u^2 v^2 = C.$$

С другой стороны, произведение импульса вдоль оси x на момент относительно точки 0 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} (x\dot{y} - \dot{x}y) &= \frac{1}{2} (u\dot{v} - v\dot{u}) [2uv(\dot{v} - u\dot{u}) - (v^2 - u^2) \times \\ &\times (u\dot{v} + v\dot{u})] = \frac{1}{2} (u\dot{v} + v\dot{u}) (u^2 + v^2) (u\dot{v} - \dot{u}v) = \\ &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (u^2 \dot{v}^2 - v^2 \dot{u}^2), \end{aligned}$$

т. е. в согласии с теоремой 1 совпадает с квадратичной частью интеграла Φ с точностью до знака. Области возможности движения:

$$\mathfrak{M}_h^C = \left\{ -hu^2 + \frac{gu^4}{2} + \mu \leq C, \quad -hv^2 - \frac{gv^4}{2} + \mu \leq -C \right\}$$

суть криволинейные прямоугольники; они ограничены отрезками координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, которые представляют собой параболы с фокусом в начале координат.

Пример 4. Движение точки в гравитационном поле двух неподвижных центров: пусть для простоты массы m_1 и m_2 находятся на оси OY в точках ± 1 . Потенциал суммарной гравитационной силы, действующей на движущуюся точку единичной массы, равен

$$V = -\gamma \frac{m_1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} - \gamma \frac{m_2}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}.$$

Введем на плоскости новые координаты $\xi \in [0, \pi]$, $\eta \in \mathbb{R}$:

$$x = \text{sh } \eta \sin \xi, \quad y = \text{ch } \eta \cos \xi.$$

В этих переменных лагранжиан принимает вид ($\gamma = 1$)

$$L = \frac{1}{2} (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \xi) (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{(m_1 + m_2) \text{ch } \eta - (m_1 - m_2) \cos \xi}{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \xi}.$$

Пришли к лиувиллевой системе.

Задача 15. Доказать, что квадратичная часть второго интеграла Φ с точностью до кинетической энергии равна произведению моментов количества движения относительно притягивающих центров.

Задача 16. Показать, что координатные линии $\eta = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ являются эллипсами и гиперболами с фокусами в притягивающих центрах. Указать несколько вариантов областей возможности движения $\mathfrak{M}$ (сначала положить $m_1 = m_2$).

Задача 17. Найти положение равновесия и исследовать его в линейном приближении. Показать, что в случае равных масс

($m_1 = m_2$) возможно движение по оси OX с частотой малых колебаний $\sqrt{m_1 + m_2}$.

Пример 5. Движение по инерции на эллипсоиде

$$\mathcal{M} = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1\}$$

(задача Якоби о геодезических на эллипсоиде).

Сначала введем в пространстве эллиптические координаты, ассоциированные с нашим эллипсоидом. Для определенности пусть $A < B < C$. По определению q_1, q_2, q_3 суть корни уравнения

$$\frac{Ax^2}{1 - Aq} + \frac{By^2}{1 - Bq} + \frac{Cz^2}{1 - Cq} = 1. \quad (9.5)$$

Таким образом,

$$-\infty < q_3 < 1/C < q_2 < 1/B < q_1 < 1/A.$$

Обратные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{BC}{A} \frac{(1 - Aq_1)(1 - Aq_2)(1 - Aq_3)}{(B - A)(C - A)}, \\ y^2 &= \frac{CA}{B} \frac{(1 - Bq_1)(1 - Bq_2)(1 - Bq_3)}{(C - B)(A - B)}, \\ z^2 &= \frac{AB}{C} \frac{(1 - Cq_1)(1 - Cq_2)(1 - Cq_3)}{(A - C)(B - C)}. \end{aligned}$$

Положив $q_3 = 0$, мы оказываемся на исходном эллипсоиде, где q_1, q_2 будут служить локальными координатами (независимыми внутри каждого октанта).

Задача 18. Показать, что в этих координатах лагранжиан движения по инерции равен

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{ABC}{8} (q_1 - q_2) \left(\frac{q_1 \dot{q}_1}{(1 - Aq_1)(1 - Bq_1)} - \frac{q_2 \dot{q}_2}{(1 - Aq_2)(1 - Bq_2)} \right).$$

Задача 19. Доказать, что эллиптическими координатами на плоскости, ассоциированными с эллипсом:

$$\frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{n+1} = 1$$

(в смысле, аналогичном (5)), будут функции

$$q_1 = n + \sin^2 \xi, \quad q_2 = n - \operatorname{sh}^2 \eta,$$

где η, ξ — координаты из примера 4. Поэтому эти последние иногда называются эллипсоидальными координатами.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ. Имеет место общая теорема, согласно которой система уравнений (5.3), (5.4), имеющая квадратичный по скоростям интеграл движения, независимый с интегралом энергии, заменой переменных может быть приведена к лиувиллеву виду. Доказательство ее опирается на вычисление собственных значений и подходящую нормировку (ортогональных) собственных векторов квадратичной части второго интеграла относительно ри-

мановой метрики на многообразии положений (заметим, что собственные значения интеграла Φ в лиувиллевой метрике равны $+f_1$ и $-f_1$ и что q_1, q_2 — ортогональные координаты).

Лиувиллевы системы на плоскости также классифицированы: лиувиллевыми могут быть только эллипсоидальные, параболические, полярные и декартовы координаты.

§ 10. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХ ТОЧЕК. ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ

В трехмерном пространстве R^3 находятся N точек с радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$ и массами m_i ; на них действуют силы $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$: говорят, что дана *система свободных точек*. Набор вектор-функций $(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$ называется *движением системы*, если удовлетворяет системе уравнений Ньютона:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сказанное в начале § 1 повторяется с очевидными изменениями.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

А. Точка S с радиусом-вектором:

$$\mathbf{s} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

называется *центром масс* (барицентром, центром инерции) системы. Векторная величина

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

называется *импульсом* системы (или количеством движения).

Теорема 1 (об изменении импульса). *Вдоль движений системы*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i;$$

иначе говоря, центр масс движется как одна материальная точка массы $M = \sum m_i$ под действием формальной суммы всех сил:

$$M \ddot{\mathbf{s}} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

Эта сумма, правда, может зависеть от состояния всей системы, так что правую часть здесь лучше всего рассматривать как сложную функцию времени, вычисленную вдоль конкретного движения.

Б. Величина

$$\Lambda_0 = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i]$$

называется *кинетическим моментом*, или *моментом количества движения* системы. Величина

$$\mathbf{G}_O = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i]$$

называется *суммарным моментом сил*.

Теорема 2 (об изменении момента). *Вдоль движений*

$$\frac{d\Lambda_O}{dt} = \mathbf{G}_O$$

(*скорость изменения момента импульсов равна моменту сил*).

АБ. Пусть $\mathbf{r}_i = \mathbf{\rho}_i + \mathbf{s}$. Вектор $\mathbf{\rho}_i$ задает положение i -й точки в подвижной системе координат, связанной с центром масс и движущейся поступательно относительно неподвижной (так называемая *система осей Кенига*). Величина $\Lambda_S = \sum_i m_i [\mathbf{\rho}_i \times \dot{\mathbf{\rho}}_i]$ назы-

вается моментом количества движения в осях Кенига, или *собственным кинетическим моментом*. Величина $\mathbf{G}_S = \sum_i [\mathbf{\rho}_i \times \mathbf{F}_i]$ на-

зывается *собственным моментом сил*.

Теорема 3=1+2 (о собственном кинетическом моменте). *Всегда*

$$\Lambda_O = M[\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}] + \Lambda_S.$$

Вдоль движений системы

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \mathbf{G}_S.$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} \Lambda_O &= \sum m_i [(\mathbf{s} + \mathbf{\rho}_i) \times (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i)] = (\sum m_i) [\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}] + \\ &+ [\mathbf{s} \times \sum m_i \dot{\mathbf{\rho}}_i] + [\sum m_i \mathbf{\rho}_i \times \dot{\mathbf{s}}] + \sum m_i [\mathbf{\rho}_i \times \dot{\mathbf{\rho}}_i]. \end{aligned}$$

Внутренние слагаемые равны нулю в силу того, что

$$\sum m_i \mathbf{\rho}_i \equiv 0, \quad \sum m_i \dot{\mathbf{\rho}}_i \equiv 0.$$

Далее, учитывая, что

$$M\ddot{\mathbf{s}} = \sum \mathbf{F}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} M[\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}] = [\mathbf{s} \times \sum \mathbf{F}_i],$$

имеем

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \sum [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i] - [\mathbf{s} \times \sum \mathbf{F}_i] = \sum [(\mathbf{r}_i - \mathbf{s}) \times \mathbf{F}_i],$$

что и требовалось.

В. Скалярная величина

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{r}_i^2, \dot{r}_i)$$

называется *кинетической энергией* системы. Величина

$$T_S = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

называется *собственной кинетической энергией*.

Теорема 4 (о вычислении и изменении кинетической энергии). *Всегда*

$$T = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{s}}^2 + T_S.$$

Вдоль движений

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{r}}_i).$$

$$\frac{dT_S}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i, \dot{\mathbf{p}}_i).$$

Доказывается это по той же схеме, что и предыдущая теорема.

АБВ. Интегралом системы называется функция состояния

$$\Phi(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

постоянная после подстановки каждого движения системы.

Простейшие типы интегралов.

А. Интеграл импульса вдоль оси X :

$$\sum_i X_i \equiv 0 \Rightarrow P_x = \sum_i m_i \dot{x}_i = \text{const.}$$

Б. Интеграл кинетического момента относительно оси Z :

$$G_z = \sum_i x_i Y_i - y_i X_i \equiv 0 \Rightarrow \Lambda_z = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = \text{const.}$$

В. Интеграл энергии:

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \Rightarrow H = T + V = \text{const.}$$

Функция $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ называется *потенциальной энергией* системы или *потенциалом сил*.

ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ. Пусть точки m_i взаимодействуют по закону **всемирного тяготения**:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

Выполняется третий закон Ньютона: $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

В задаче N тел имеются следующие интегралы: импульс $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$, момент $\mathbf{L}_0 = (L_x, L_y, L_z)$, энергия $H = T + V = h$, где $V = -\sum \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$. Интегралов всего семь. При $N > 2$ их мень-

ше, чем число степеней свободы $(3N)$. При $N=2$ положим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

и получим уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad V(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|},$$

т. е. задача двух тел сводится к уже рассмотренной задаче Кеплера. Всюду дальше $N \geq 3$; система координат связана с центром масс, который движется равномерно и прямолинейно (поскольку $\mathbf{P} = \text{const}$). Иначе говоря, мы считаем, что

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad \mathbf{P} = 0.$$

Назовем движение в задаче N тел *планетарным*, если нет столкновений и попарные расстояния ограничены на всей оси времени t .

Теорема Якоби. *Планетарное движение возможно только при отрицательной константе интеграла энергии: $h < 0$.*

Лемма 1. Полный барицентрический момент системы

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$$

(тождество Лагранжа). В самом деле,

$$MI = MI - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right)^2 = \left(\sum_i m_i \right) \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right)^2.$$

Легко убедиться, что коэффициенты при $m_i m_j$ в этом выражении всегда равны $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$.

Лемма 2 (формула Лагранжа). Вдоль движений

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -2V + 4h.$$

Действительно, непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{dI}{dt} = 2 \sum_i m_i (\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i),$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_i m_i (\mathbf{r}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i) + 2 \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = -2 \sum_i \left(\mathbf{r}_i, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \right) + 4T.$$

Если $F(z)$ — однородная функция от z степени n , $F(\lambda z) = \lambda^n F(z)$, то $\sum_\alpha z_\alpha \frac{\partial F}{\partial z_\alpha} = nF$. Применяя этот факт к потенциалу, степень однородности которого равна -1 , получаем

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2V + 4T = 4h - 2V.$$

Доказательство теоремы. Пусть движение планетарное и $h \geq 0$. Тогда $\frac{d^2 I}{dt^2} > 4h$ (потенциал V всюду строго отрицателен); следовательно, I — функция, строго выпуклая вниз. Но любая такая функция стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow -\infty$, откуда в силу леммы 1 вытекает неограниченность попарных расстояний, и получаем противоречие.

З а м е ч а н и е. В задаче трех тел тройные столкновения возможны лишь при $\Lambda = 0$ (теорема Вейерштрасса; без доказательства).

Задача 20. Доказать, что а) движение с заданным значением вектора Λ и постоянной энергии h происходит только при тех $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$, для которых

$$\Lambda^2/2I + V \leq h;$$

б) в плоской задаче трех тел (все $\mathbf{r}_i$ принадлежат неподвижной плоскости) последнее неравенство не только необходимо, но и достаточно, т. е. задает область возможности движения.

§ 11. КИНЕМАТИКА

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Пусть $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — ортонормированные реперы одинаковой ориентации. Матрица перехода от первого ко второму реперу пусть будет

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

В ней по столбцам стоят координаты векторов нового репера в старом. Это собственная ортогональная матрица, т. е.

$$Q^{-1} = Q^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

$$\det Q > 0.$$

Отсюда вытекает, что $\det Q = 1$. Множество ортогональных матриц с определителем $+1$ образует группу относительно умножения, так называемую специальную ортогональную группу $SO(3)$.

Матрицы перехода применяются двумя способами.

1) Если произведена замена системы координат, т. е. все векторы $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$ надлежит разложить по новому реперу: $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, то

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

2) Если в $\mathbb{R}^3$ имеется отображение специального вида: пово-

рот Π , при котором попарные расстояния между точками остаются неизменными, а репер $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ преобразуется в репер $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, то произвольный вектор $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$ преобразуется в вектор $\mathbf{a}' = a'_x \mathbf{e}_x + a'_y \mathbf{e}_y + a'_z \mathbf{e}_z$ (разложенный по-прежнему по векторам исходного репера), причем

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

Примером сочетания этих двух точек зрения является

Лемма 1. Пусть поворот Π имеет матрицу Q в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, а матрица P — матрица перехода к другому реперу $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Тогда поворот Π в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ имеет матрицу

$$Q' = P^{-1}QP.$$

В самом деле, пусть $\mathbf{a}' = \Pi \mathbf{a}$. Тогда в силу (3)

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Обращаясь теперь к (4), получаем

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = P^{-1}Q \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = P^{-1}QP \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Лемма 2 (о вычислении матрицы композиции поворотов). Пусть Π_1 и Π_2 — два поворота, Q_1, Q_2 — их матрицы. Тогда поворот $\Pi = \Pi_2 \circ \Pi_1$ имеет матрицу

- а) $Q_2 Q_1$, если Q_2 записана в исходном базисе $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$;
- б) $Q_1 Q_2$, если Q_2 записана в базисе, полученном из $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ после первого поворота.

После курса линейной алгебры привычен первый вариант перемножения, тогда как на практике чаще применяется второй. На первый взгляд он кажется странным. Его мы и докажем. Пусть

$$\mathbf{a}^{(1)} = \Pi_1 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \Pi_2 \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = \Pi_1(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z);$$

тогда по предположению

$$\begin{pmatrix} a_x^{(1)} \\ a_y^{(1)} \\ a_z^{(1)} \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \\ a_z^{(2)} \end{pmatrix} = Q_2 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$

и в силу свойства (3)

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{pmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \\ a_z^{(2)} \end{pmatrix} = Q_1 Q_2 Q_1^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Композицию поворотов получим, подставив справа $(a_x^{(1)}, a_y^{(1)}, a_z^{(1)})$ вместо (a_x, a_y, a_z) .

Задача 21. Доказать (и запомнить), что матрица поворота на угол φ вокруг оси Oz (против часовой стрелки, глядя сверху) имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 22. Показать, что повороты на $\pi/2$ вокруг e_x и e_y не перестановочны: $\Pi_2 \circ \Pi_1 \neq \Pi_1 \circ \Pi_2$. Таким образом, группа $SO(3)$ некоммутативна.

Задача 23. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ — векторы-столбцы, $[\vec{a}, \vec{b}]$ — их формальное векторное произведение:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что для любой собственной ортогональной матрицы

$$[Q\vec{a}, Q\vec{b}] = Q[\vec{a}, \vec{b}].$$

Выкладок производить не следует.

Задача 24. Пусть матрица (1) отвечает повороту на некоторый угол χ вокруг инвариантного вектора i . Показать, что

а) след матрицы $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 1 + 2 \cos \chi$;

б) инвариантный вектор имеет одни и те же компоненты как в исходном, так и в преобразованном репере;

в) вектор с компонентами $(\gamma_2 - \beta_2, \alpha_3 - \gamma_1, \beta_1 - \alpha_2)$ является инвариантным и отличен от нуля при $\chi \neq \pi k$.

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ. Пусть дано семейство поворотов $\Pi(t)$ (вращение) с матрицей $Q(t)$, гладко зависящей от времени. В результате репер (e_i, e_n, e_t) как-то вращается.

Лемма 3. Матрица $\Omega = Q^{-1} \dot{Q}$ кососимметрична при каждом t . Действительно, дифференцируя тождество

$$Q^* Q = E$$

и заменяя, где надо, Q^* на Q^{-1} , имеем

$$Q^{-1} \dot{Q} + \dot{Q}^* Q = Q^{-1} \dot{Q} + (Q^{-1} \dot{Q})^* = 0.$$

Кососимметричные матрицы образуют алгебру Ли группы $SO(3)$, обозначаемую $so(3)$. Алгебра Ли — это векторное пространство с операцией $[v_1, v_2]$, билинейной по своим аргументам и удовлетворяющей следующим условиям:

1) антикоммутативность: $[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$,
 2) тождество Якоби: $[[v_1, v_2], v_3] + [[v_3, v_1], v_2] + [[v_2, v_3], v_1] \equiv 0$. В случае $SO(3)$ $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1\Omega_2 - \Omega_2\Omega_1$. Простейший нетривиальный пример алгебры Ли — это пространство $\mathbb{R}^3(a_1, a_2, a_3)$ с операцией формального векторного умножения (ср. с § 3).

Задача 25. Проверить, что названные только что алгебры изоморфны в силу соответствия

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Задача 26. Соответствие $\Omega \leftrightarrow \omega$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Omega \bar{a} = [\bar{\omega}, \bar{a}]$ для любого вектора-столбца $\bar{a}$.

Лемма 4. При построенном изоморфизме

$$P\bar{\omega} \leftrightarrow P\Omega P^{-1}, \quad (11.6)$$

если P — собственная ортогональная матрица. В самом деле, согласно задаче 26,

$$P\Omega P^{-1}a = P[\bar{\omega}, P^{-1}\bar{a}],$$

а в силу задачи 23

$$P[\bar{\omega}, P^{-1}\bar{a}] = [P\bar{\omega}, PP^{-1}\bar{a}] = [P\bar{\omega}, \bar{a}].$$

Таким образом, для всех $\bar{a}$

$$P\Omega P^{-1}\bar{a} = [P\bar{\omega}, \bar{a}].$$

Снова апеллируя к задаче 26, получаем (6).

Основное определение. Угловой скоростью вращения $\Pi(t)$ называется вектор $\omega = \omega_1 e_x + \omega_2 e_y + \omega_3 e_z$ такой, что

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Omega = Q^{-1}\dot{Q}.$$

Подчеркнем, что вектор угловой скорости ω раскладывается по подвижному реперу. Это вообще обычный прием в механике.

Замечание. Определение корректно, т. е. вектор ω не зависит от того, в каком именно репере записана матрица поворота $\Pi(t)$. Это доказывается с помощью лемм 1, 4 и формул (3).

Задача 27. Пусть $\Pi(t)$ — поворот вокруг оси Oz на угол $\varphi(t)$. Показать, что угловая скорость $\omega = \varphi e_z$ (см. задачу 21).

Задача 28. Пусть $\omega = \tilde{\omega}_1 e_x + \tilde{\omega}_2 e_y + \tilde{\omega}_3 e_z$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \tilde{\Omega} = \dot{Q}Q^{-1}.$$

Лемма Пуассона. Производные базисных векторов

$$\dot{e}_x = [\omega \times e_x]; \quad \dot{e}_y = [\omega \times e_y]; \quad \dot{e}_z = [\omega \times e_z]. \quad (11.7)$$

Подчеркнем, что эти формулы записаны в инвариантном виде, т. е. участвующие в них векторы в принципе могут быть разложены по произвольному реперу. Доказательство, однако, проводится в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Имеем, например,

$$\mathbf{e}_\xi = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу определения угловой скорости и задачи 26

$$\frac{d\mathbf{e}_\xi}{dt} = \dot{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \left[\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Согласно формуле (3), справа стоят компоненты вектора $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\xi]$, пересчитанные из репера $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ в репер $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА. *Твердым телом* называется множество точек, которые движутся так, что попарные расстояния между ними не изменяются. Если в теле есть три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, то можно образовать ортонормированный репер, жестко связанный с телом, в котором координаты всех точек тела будут постоянны, например:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 29. Получить такой репер с помощью операций над векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$.

Угловой скоростью тела называется угловая скорость всякого связанного с ним репера. На доказательстве корректности определения задерживаться не будем (см. замечание перед задачей 27). То, что точка A перемещается, роли не играет; важна лишь ориентация подвижного репера.

Теорема Эйлера. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, A, B — произвольные его точки. Тогда

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}]. \quad (11.8)$$

Доказательство. Свяжем с телом репер $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, построенный в точке A . Пусть (ξ, η, ζ) — постоянные координаты точки B в этом репере. Тогда в системе $Oxyz$ ее координаты

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (11.9)$$

где a_x, a_y, a_z — координаты точки A . Дифференцируем:

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + \dot{Q} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + QQ^{-1}\dot{Q} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + Q \left[\begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right].$$

Первое слагаемое имеет смысл $\mathbf{v}_A$, второе представляет собой столбец компонент вектора $\boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$ в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (до применения матрицы Q стоит столбец компонент этого вектора в репере $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$).

Формула Эйлера (8) читается обычно как *формула распределения скоростей в твердом теле*; если известна скорость только одной точки тела A , а также угловая скорость, то можно вычислить скорость любой другой точки B того же тела. Подчеркнем также, что формула Эйлера записана в инвариантном виде.

МГНОВЕННАЯ ОСЬ ВРАЩЕНИЯ. Выведем некоторые следствия из формулы Эйлера.

1. В твердом теле существует точка C такая, что

$$\mathbf{v}_C \parallel \boldsymbol{\omega}.$$

При $\boldsymbol{\omega} = 0$ утверждение тривиально. В общем случае пусть известна скорость $\mathbf{v}_A$ некоторой точки A . Возьмем точку C такую, что $\overline{AC} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A] / \omega^2$. Легко проверить, что она будет обладать требуемым свойством:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \omega^{-2} [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A]] = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A) \omega^{-2}.$$

Заодно мы вычислили $\mathbf{v}_C$. Если C' — другая точка с этим же свойством, что $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_{C'}$, $\mathbf{v}_{C'} - \mathbf{v}_C = [\boldsymbol{\omega} \times \overline{CC'}]$, откуда $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C'} + \overline{CC'} \parallel \boldsymbol{\omega}$. Таким образом, все возможные точки C замечают прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{\omega}$. Она называется *мгновенной осью вращения* при $\mathbf{v}_C = 0$ и *мгновенно-винтовой осью* при $\mathbf{v}_C \neq 0$.

2. У тела, движущегося в плоскости с ненулевой угловой скоростью, в каждое мгновение имеется точка C , скорость которой равна нулю (мгновенный центр скоростей).

Пусть это плоскость Oxy . Введем *абсолютный угол поворота* φ тела: например, угол, составляемый отрезком, отмеченным в теле, с осью Ox и отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны Oz . Тогда, согласно задаче 27, $\boldsymbol{\omega} = \varphi \mathbf{e}_z \perp Oxy$. Следовательно, по формуле (8) $\mathbf{v}_C = 0$.

Мгновенная ось вращения проходит через C перпендикулярно плоскости. Распределение скоростей дается формулой

$$\mathbf{v}_B = [\boldsymbol{\omega} \times \overline{CB}].$$

Это значит, что мгновенный центр скоростей всегда лежит на прямой, ортогональной вектору $\mathbf{v}_B$ в точке B .

Определение. Говорят, что плоское тело катится по кривой без проскальзывания, если оно касается этой кривой, и скорость той точки тела P , которая оказалась в месте соприкосновения C , всякий раз равна нулю. Иными словами, она есть мгновенный центр скоростей.

Вопрос. Какие точки поезда движутся в противоположном направлении?

Пример 1. Диск катится по прямой без проскальзывания (рис. 30). Пусть x — первая координата его центра A , φ — абсолютный угол поворота. Покажем, что между x и φ имеется тождественное соотношение (связь). А именно

$$x + r\varphi = \text{const.} \quad (11.10)$$

Имеем

$$\mathbf{v}_A = [\omega \times \overline{CA}]; \quad \dot{x}\mathbf{e}_x = [\dot{\varphi}\mathbf{e}_z \times r\mathbf{e}_y] = -r\dot{\varphi}\mathbf{e}_x,$$

откуда

$$\dot{x} + r\dot{\varphi} = 0.$$

Что и требовалось. Тождество (10), разумеется, понятно из чисто геометрических соображений: дуга, прокатившаяся по прямой, по длине равна пройденному центром пути. Однако в мало-мальски более сложной задаче такого рода соображения, как показывает практика, неизменно сопряжены с ошибками. Кинематические приемы намного эффективнее.

Задача 30. Диск радиуса r катится без проскальзывания по окружности радиуса ρ (рис. 32). Абсолютный угол поворота диска пусть будет φ , а угол поворота радиуса-вектора центра диска, проведенного из центра неподвижной окружности, пусть будет Θ . Найти связь между Θ и φ .

Ответ: $(\rho - r)\Theta + r\varphi = \text{const}$ (а вовсе не $\rho\Theta = r\varphi$ — обычный скорый ответ).

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. Пусть точка P движется в пространстве, $\mathbf{r} = \overline{OP}$ — ее радиус-вектор в системе координат $Oxyz$. Наряду с последней пусть применена подвижная система координат $A\xi\eta\zeta$ и пусть $\mathbf{\rho} = \overline{AP}$ — радиус-вектор точки P в ней (рис. 10). Положим

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\rho} = \overline{AP} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix};$$

тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix},$$

так же как и при доказательстве формулы Эйлера, с одним, но существенным отличием: величины ξ , η , ζ теперь суть функции времени. Дифференцируя с учетом сказанного, получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + Q \left[\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right] + Q \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

Вектор

$$\mathbf{v}_{abc} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

называется *абсолютной скоростью* точки. Вектор

$$\mathbf{v}_{отн} = \dot{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + \dot{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + \dot{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta},$$

имеющий в неподвижной системе координат столбец компонент

$$Q \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix},$$

называется *относительной скоростью* точки. Первые два слагаемых правой части (11) составляют так называемую *переносную скорость* точки P . Итак, имеем *формулу сложения скоростей*:

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{v}_{отн} + \mathbf{v}_{пер}.$$

Что касается переносной скорости, то ее можно осмыслить так: это абсолютная скорость точки, если та вдруг прекратит двигаться относительно подвижной системы координат, т. е. вдруг образует одно твердое тело с векторами подвижного репера, движущимися с угловой скоростью ω .

Задача 31. Трубка, изогнутая в форме кольца, поворачивается вокруг вертикальной оси на угол $\psi(t)$, а в ней движется точка по закону $\theta(t)$ (рис. 13). Требуется вычислить и изобразить $\mathbf{v}_{пер}$ и $\mathbf{v}_{отн}$, получить модуль абсолютной скорости. Ответ: $v^2 = r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta)$.

СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ. Пусть теперь с использованием подвижной системы координат рассматривается движение твердого тела. Тогда оно имеет абсолютную угловую скорость ω_{abc} с точки зрения неподвижной системы координат и относительную угловую скорость $\omega_{отн}$ с точки зрения подвижной системы координат. Угловую скорость системы координат обозначим для выразительности через $\omega_{пер}$. Как и следовало ожидать,

$$\omega_{abc} = \omega_{пер} + \omega_{отн}.$$

Доказательство. Свяжем с телом репер $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ и введем матрицы перехода:

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \xrightarrow{Q_1} (\mathbf{e}_{\xi}, \mathbf{e}_{\eta}, \mathbf{e}_{\zeta}) \xrightarrow{Q_2} (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z);$$

тогда компоненты вектора ω_{abc} в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ соответствуют матрице $(Q_1 Q_2)^{-1} \frac{d}{dt} (Q_1 Q_2)$ или (выполним дифференцирование произведения) сумме матриц:

$$\Omega_{abc} = Q_2^{-1} Q_1^{-1} \dot{Q}_1 Q_2 + Q_2^{-1} \dot{Q}_2. \quad (11.12)$$

Вторая матрица по определению составлена из компонент вектора $\omega_{отн}$ в репере $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Матрица $\Omega_{пер} = Q_1^{-1} \dot{Q}_1$ соответствует столбцу компонент вектора $\omega_{пер}$ в репере $\mathbf{e}_{\xi}, \mathbf{e}_{\eta}, \mathbf{e}_{\zeta}$. Применив к этому столбцу матрицу Q_2^{-1} , мы получим столбец компонент векто-

ра $\omega_{\text{пер}}$ в репере e_x, e_y, e_z , а по лемме 4 новому столбцу соответствует как раз первое слагаемое формулы (12).

Пример 2. К диску радиуса r ортогонально прикреплен в центре штанга длины d . Диск катится по горизонтальной плоскости так, что свободный конец штанги A неподвижен на высоте r над плоскостью. Пусть ψ — абсолютный угол поворота штанги вокруг вертикали, φ — угол поворота диска в подвижной системе координат $A\xi\eta\zeta$ такой, что ось $A\xi$ вертикальна, ось $A\zeta$ направлена по штанге. Вычислить связь между ψ, φ (рис. 11).

Имеем

$$\omega_{\text{отн}} = \dot{\varphi} e_\xi, \quad \omega_{\text{пер}} = \dot{\psi} e_\zeta, \quad \omega_{\text{абс}} = \dot{\varphi} e_\xi + \dot{\psi} e_\zeta.$$

С другой стороны, скорость в точке касания

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + [\omega_{\text{абс}} \times \overline{OP}] = 0, \quad \mathbf{v}_O = 0,$$

так что

$$[\omega_{\text{абс}} \times \overline{OP}] = 0,$$

$$[(\dot{\varphi} e_\xi + \dot{\psi} e_\zeta) \times (d e_\xi - r e_\zeta)] \equiv 0,$$

$$r\dot{\varphi} + d\dot{\psi} = 0,$$

что и требовалось.

Задача 32. Шар с ортогонально прикрепленной к нему штангой длины $l-r$ катится по горизонтальной плоскости так (рис. 12), что свободный конец штанги неподвижно лежит на плоскости. Пусть v — абсолютная скорость центра шара. Определить абсолютную и относительную угловые его скорости в системе $A\xi\eta\zeta$, в которой горизонтальная ось $A\eta$ перпендикулярна штанге.

Ответ:

$$\omega_{\text{абс}} = -\frac{v}{r} e_\xi, \quad \omega_{\text{отн}} = -\frac{v}{r} e_\xi - \frac{v}{\sqrt{l^2 - r^2}} e_\zeta.$$

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим твердое тело, масса которого распределена по кривой, поверхности или объему $\mathcal{G}$; обозначим через ρ плотность массы, зависящую, вообще говоря, от точки. Введем для краткости элемент массы $dm = \rho d\tau$, где $d\tau$ — элемент дуги, площади или объема соответственно (более общо говорить о мере Лебега dm ; тогда охватывается и дискретное распределение масс). В произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ в случае, например, пространственного распределения масс $dm = \rho(x, y, z) dx dy dz$. Условимся писать сокращенно:

$$\int_{\mathcal{G}} f(P) dm = \int_{(x, y, z) \in \mathcal{G}} f(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Конкретное выражение $\rho(x, y, z)$ зависит от того, как твердое тело расположено относительно системы координат. Если система координат связана с телом, то выражение ρ будет одним и тем же во всех положениях тела. Мы будем вычислять интегралы как скалярных, так и векторных функций точки $P \in \mathcal{G}$. Величина

$$M = \int_{\mathcal{G}} dm$$

(интеграл от единицы) называется массой тела, величина

$$s = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{G}} \overline{OP} dm -$$

радиус-вектором центра масс тела относительно точки O .

ОПЕРАТОР ИНЕРЦИИ. Это узловое понятие, с которым мы будем постоянно оперировать на протяжении всего параграфа. По определению *оператор инерции относительно точки O* переводит произвольный вектор $u \in \mathbb{R}^3$ в вектор

$$\Gamma_O(u) = \int_{\mathcal{G}} [\overline{OP} \times [u \times \overline{OP}]] dm.$$

Легко проверить, что этот оператор линеен и самосопряжен (симметричен):

$$(u_1 \Gamma_O(u_2)) = (u_2, \Gamma_O(u_1)).$$

Определение. Моментом инерции тела относительно прямой l называется число $I(l) = (f, \Gamma_O(f))$, где O — некоторая точка l , f — единичный направляющий вектор прямой.

Покажем, что $I(l)$ не зависит от выбора точки O на прямой:

$$\begin{aligned} I(l) &= \left(f, \int_{\mathcal{G}} [\overline{OP} \times [f \times \overline{OP}]] dm \right) = \left(f, \int_{\mathcal{G}} (f \cdot \overline{OP}^2 - \overline{OP}(f, \overline{OP}) dm) \right) = \\ &= \int_{\mathcal{G}} ((\overline{OP}^2 - (f, \overline{OP})^2) dm = \int_{\mathcal{G}} d^2(P, l) dm \geq 0, \end{aligned}$$

здесь $d(P, l)$ — расстояние от точки P до прямой l .

Матричное выражение оператора инерции. Пусть $Oe_\xi e_\eta e_\zeta$ — репер, связанный с телом; тогда

$$\Gamma_O(u) = \int_{\mathcal{G}} \{ \overline{OP}^2 u - \overline{OP}(u, \overline{OP}) \} dm = \begin{pmatrix} I_1 & -J_3 & -J_2 \\ -J_3 & I_2 & -J_1 \\ -J_2 & -J_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathcal{G}} (\eta^2 + \zeta^2) dm, & I_2 &= \int_{\mathcal{G}} (\xi^2 + \zeta^2) dm, & I_3 &= \int_{\mathcal{G}} (\xi^2 + \eta^2) dm, \\ J_1 &= \int_{\mathcal{G}} \eta \zeta dm, & J_2 &= \int_{\mathcal{G}} \xi \zeta dm, & J_3 &= \int_{\mathcal{G}} \xi \eta dm. \end{aligned}$$

Можно заметить, что $I_1 + I_2 \geq I_3$, $I_3 + I_1 \geq I_2$, $I_2 + I_3 \geq I_1$. Если $I_1 + I_2 = I_3$, то все тело лежит в плоскости $O\xi\eta$. Если $I_3 = 0$, то все тело лежит на оси $O\xi$.

Задача 33. Проверить, что выполняются неравенства типа

а) $J_1^2 \leq I_2 I_3$;

б) $4J_1^2 \leq I_1^2 - (I_2 - I_3)^2$.

Какое из этих неравенств сильнее?

ГЛАВНЫЕ ОСИ. Собственный репер $Oee'e''$ самосопряженно-го оператора Υ_O называется *главным* в точке O . Матрица оператора принимает вид

$$\begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}.$$

Числа A_O , B_O , C_O называются главными моментами инерции в точке O . Плоскость (прямая) называется главной для некоторой своей точки O , если содержит два вектора (один из векторов) главного репера в точке O .

Задача 34. Плоскость (ось) симметрии распределения масс тела есть главная для всех своих точек. Доказать.

Задача 35. А. Пусть S — центр масс, Q — произвольная точка, f — единичный вектор, d — расстояние между прямыми Qf , Sf . Тогда $I(Qf) = I(Sf) + Md^2$ (формула Гюйгенса—Штейнера).

Б. Пусть $Sxyz$ — декартова система координат с осями, главными в S , и $A_S = Ma^2 > B_S = Mb^2 > C_S = Mc^2$. Показать, что главные направления в точке $P(x, y, z)$ параллельны координатным линиям эллиптических координат, ассоциированных с *гирационным эллипсоидом*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а соответствующие главные моменты инерции суть

$$A_P(B_P, C_P) = M(x^2 + y^2 + z^2) + Mq_1(Mq_2, Mq_3).$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ. Имеются в виду импульс, кинетический момент и кинетическая энергия, которые уже рассматривались применительно к системе свободных материальных точек в § 10. В случае, когда система точек образует твердое тело, выражения для этих величин принимают специфический вид в связи с тем, что скорости точек тела образуют распределение, описываемое формулой Эйлера: $v_P = v_S + [\omega \times \overline{SP}]$. Таким образом, в каждый момент времени скорости зависят от точки тела, а зависимость их от времени проявляется только через векторы v_S , ω , которые являются общими для всех точек тела.

Л е м м а 1. Имеют место формулы:

(А) $P = M\dot{s}$;

(Б) $\Lambda_O = M[s \times \dot{s}] + \Lambda_S$, $\Lambda_S = \Upsilon_S(\omega)$;

$$(B) \quad T = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + T_s, \quad T_s = \frac{1}{2} (\Lambda_s, \omega) = \frac{1}{2} (\omega, \Upsilon_s(\omega)).$$

Доказательство начнем с того, что

$$\int_{\mathcal{E}} \overline{SP} dm = \overline{SS} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_{\mathcal{E}} \mathbf{v}_p dm = \int_{\mathcal{E}} (\mathbf{v}_s + [\omega \times \overline{SP}]) dm = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{v}_s dm + \\ &+ \left[\omega \times \int_{\mathcal{E}} \overline{SP} dm \right] = M \mathbf{v}_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_{\mathcal{E}} [\overline{OP} \times \mathbf{v}_p] dm = \int_{\mathcal{E}} [(\overline{OS} + \overline{SP}) \times (\mathbf{v}_s + [\omega \times \overline{SP}])] dm = \\ &= \int_{\mathcal{E}} [\overline{OS} \times \mathbf{v}_s] dm + \int_{\mathcal{E}} [\overline{SP} \times [\omega \times \overline{SP}]] dm \end{aligned}$$

плюс слагаемые, равные нулю. Наконец,

$$\begin{aligned} 2T &= \int_{\mathcal{E}} \mathbf{v}_p^2 dm = \int_{\mathcal{E}} [v_s + [\omega \times \overline{SP}], v_s + [\omega \times \overline{SP}]] dm = \\ &= \int_{\mathcal{E}} \mathbf{v}_s^2 dm + \int_{\mathcal{E}} ([\omega \times \overline{SP}], [\omega \times \overline{SP}]) dm = \\ &= M \dot{s}^2 + \int_{\mathcal{E}} (\omega, [\overline{SP} \times [\omega \times \overline{SP}]] dm. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть See'' — главный репер в центре масс, A, B, C — главные центральные моменты инерции, угловая скорость $\omega = p\mathbf{e} + q\mathbf{e}' + r\mathbf{e}''$. Тогда

$$\Lambda_s = Ape + Bqe' + Cre'', \quad T_s = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. Пусть в точках $P_i \in \mathcal{E}$, $i=1, \dots, N$, приложены силы $\mathbf{F}_i$. Введем две векторные величины: формальную сумму сил $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$ и суммарный момент сил относительно точки A — $\mathbf{G}_A = \Sigma [\overline{AP}_i \times \mathbf{F}_i]$. Векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}_S$ могут зависеть от положения и ориентации тела, его угловой скорости и скорости центра масс и от времени. Уравнения движения свободного твердого тела имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}, \quad (12.1)$$

$$\frac{d}{dt} \Lambda_s = \mathbf{G}_s. \quad (12.2)$$

Эти уравнения мы постулируем. Позднее в § 13 мы сможем вывести их из принципа д'Аламбера — Лагранжа, который, конечно,

опять-таки постулируется. Принимая пока уравнения (1) и особенно (2) без доказательства, мы хотим еще раз подчеркнуть значение формулы изменения кинетического момента.

НЕСВОБОДНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО. Если перемещения тела как-то ограничиваются, то говорят, что на него *наложены связи* (точные формулировки будут даны позднее). Чтобы применить уравнения (1) и (2), можно рассматривать тело как свободное и считать, что связи реализуются за счет воздействия некоторых дополнительных сил, которые называются реакциями связей. Существуют общепринятые приемы подмены связей силами, основанные на простейших физических моделях взаимодействия твердых тел (сами модели остаются при этом в тени).

Примеры связей:

1) *скольжение тела по поверхности* (рис. 24, а): связь состоит в том, что скорость v_P той точки тела, которой оно соприкасается с опорой, параллельна общей касательной тела и опоры, реакция ортогональна касательной, но величина ее априори не известна;

2) *качение тела по поверхности без проскальзывания* (рис. 24, б): связь имеет вид $v_P=0$, сила реакции приложена в точке касания, как и выше, но здесь и направление ее, вообще говоря, произвольно;

3) *движение тела вокруг неподвижной точки*: сила реакции в точке закрепления может в принципе быть любой;

4) *тело привязано за нить*: сила реакции направлена по нити, но про ее величину заранее ничего сказать нельзя.

Пример. Вращение диска вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 15). Ось проходит через центр S диска под углом α к его плоскости и кончается в точках A_1, A_2 , находящихся на расстоянии d от S . Требуется а) доказать, что $\dot{\psi} = \text{const}$; б) вычислить реакцию в точках опоры A_1 и A_2 .

Решение. Выпишем динамические уравнения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad (12.3)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_S = [\overline{SA_1} \times \mathbf{R}_1] + [\overline{SA_2} \times \mathbf{R}_2]. \quad (12.4)$$

Введем два репера, связанные с диском:

1) $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ вертикален;

2) $\mathbf{e}, \mathbf{e}', \mathbf{e}''$, главный в точке O ; моменты инерции $A = mr^2/2$, $B = C = mr^2/4$. Симметрия позволяет принять $\mathbf{e}' = \mathbf{e}_y$, другие векторы

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e} \sin \alpha + \mathbf{e}'' \cos \alpha, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e} \cos \alpha - \mathbf{e}'' \sin \alpha.$$

Так как точка S неподвижна, $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + m\mathbf{g} = 0$, или

$$\begin{cases} R_{1x} + R_{2x} = 0, \\ R_{1y} + R_{2y} = 0, \\ R_{1z} + R_{2z} - mg = 0. \end{cases} \quad (12.5)$$

Считаем, что $\mathbf{R}_1 \perp Oz$ (ось в точке A_1 удерживается только сбоку),

т. е. $R_{1z}=0$. Тогда $R_{2z}=mg$. Имеем далее

$$\omega = \dot{\psi} \mathbf{e}_z = \dot{\psi} (\cos \alpha \mathbf{e}'' + \sin \alpha \mathbf{e}),$$

$$\Lambda_S = \frac{mr^2}{4} \dot{\psi} \cos \alpha \mathbf{e}'' + \frac{mr^2}{2} \dot{\psi} \sin \alpha \mathbf{e} = (1/4)mr^2 \dot{\psi} (\cos \alpha \mathbf{e}'' + 2 \sin \alpha \mathbf{e}) =$$

$$(\text{так как } \mathbf{e}'' = \mathbf{e}_z \cos \alpha - \mathbf{e}_x \sin \alpha, \mathbf{e} = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_z \sin \alpha)$$

$$= (1/4)mr^2 \dot{\psi} (\sin \alpha \cos \alpha \mathbf{e}_x + (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \mathbf{e}_z).$$

Суммарный момент сил с учетом (5)

$$\mathbf{G}_S = [\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}_1 \times \mathbf{R}_1] + [\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}_2 \times \mathbf{R}_2] = [d\mathbf{e}_z \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)] = 2dR_{1x}\mathbf{e}_y - 2dR_{1y}\mathbf{e}_x. \quad (12.6)$$

Вектор $\mathbf{e}_z$ постоянен и $(\mathbf{G}_S, \mathbf{e}_z) \equiv 0$, отсюда

$$\frac{d}{dt} (\Lambda_S, \mathbf{e}_z) = \left(\frac{d}{dt} \Lambda_S, \mathbf{e}_z \right) = (\mathbf{G}_S, \mathbf{e}_z) \equiv 0, \quad (12.7)$$

так что $(\Lambda_S, \mathbf{e}_z) = \text{const}$ и, наконец, $\dot{\psi} = \text{const}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_S}{dt} &= \frac{mr^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\psi} \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{mr^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\psi} [\omega \times \mathbf{e}_x] = \\ &= \frac{mr^2 \dot{\psi}^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Приравнявая к (6), получаем

$$\frac{mr^2}{4} \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha \mathbf{e}_y = 2d (R_{1x}\mathbf{e}_y - R_{1y}\mathbf{e}_x),$$

откуда

$$\begin{cases} R_{1x} = \frac{mr^2}{8d} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\psi}^2, \\ R_{1y} = 0. \end{cases}$$

Задача 36. По плоскости катится диск с невесомой штангой (из примера 2 § 11). Доказать, что $\dot{\psi} = \text{const}$, найти кинетическую энергию и силу реакции в точке касания. Дано, что $\mathbf{R}$ лежит в плоскости диска.

Ответ:

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{3}{2} d^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) \dot{\psi}^2,$$

$$\mathbf{R} = m \left(g + \frac{r}{2} \dot{\psi}^2 \right) \mathbf{e}_z.$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ СИЛ. Силы, действующие на твердое тело, на практике всегда имеют наглядное физическое происхождение и, если можно так сказать, естественные точки приложения: сила тяжести прикладывается в центре масс, силы

реакции — в точке контакта и т. д. Тем не менее бывает полезно проделать некоторые мысленные манипуляции с силами, разумеется, такие манипуляции, которые не сказываются на движении тела. Более конкретно, можно производить следующие *эквивалентные преобразования системы сил*:

1) всякую силу F_i , приложенную в точке P_i , можно перенести вдоль ее линии действия, т. е. прямой, проходящей через эту точку в направлении силы;

2) если несколько сил $F_{i1}, \dots, F_{ik}$ приложены в общей точке P , то их можно заменить другой конечной совокупностью сил $F'_{j1}, \dots, F'_{jl}$ при условии, что

$$\Sigma F_{ik} = \Sigma F'_{jl}.$$

Легко понять, что в результате эквивалентных преобразований не изменяется ни суммарная сила ΣF_i , ни суммарный момент сил относительно любой точки, в том числе центра масс. Поэтому в результате эквивалентных преобразований уравнения движения (1) и (2) изменений не претерпевают.

Система сил вида (P, F) , $(P_2, -F)$ называется *парой сил*. Момент пары сил относительно любой точки A равен

$$G = [\overline{AP_1} \times F] + [\overline{AP_2} \times -F] = [F \times (AP_2 - AP_1)] = [F \times \overline{P_1P_2}],$$

т. е. не зависит от точки A , а суммарная сила равна нулю. Линии действия сил пары параллельны, а проведенная через них плоскость ортогональна моменту.

Произвольную систему с моментом G_S и суммой F эквивалентными преобразованиями можно привести к системе, состоящей из трех сил: пары сил с моментом G_S и силы F , приложенной к точке S .

З а м е ч а н и е о силе тяжести. Строго говоря, к каждой частице твердого тела приложена своя небольшая сила тяжести — ее вес, а суммарная сила mg , которую мы прикладываем к центру масс, есть результат эквивалентного преобразования такой распределенной по телу системы сил.

ТЕЛО С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. Движение его определяется изменением кинетического момента относительно закрепленной точки O :

$$L_O = M[s \times \dot{s}] + L_S. \quad (12.8)$$

Пусть $F = \Sigma F_i$ — результирующая всех заданных сил, действующих на тело (кроме силы реакции R в неподвижной точке), G_A — момент этих же сил относительно произвольной точки A . Нетрудно показать, что

$$G_B = G_A + [F \times \overline{AB}] \quad (12.9)$$

Л е м м а 3. При движении

$$\frac{dL_O}{dt} = G_O. \quad (12.10)$$

Для доказательства надо продифференцировать Λ_o в силу уравнений (1) и (2), учитывая в них, конечно, и силу R (которая уничтожится), а затем по (8) изменить точку приведения S на O .

Л е м м а 4. Всегда

$$\Lambda_o = \Upsilon_o(\omega), \quad T_o = \frac{1}{2}(\omega, \Lambda_o(\omega)). \quad (12.11)$$

Доказательство: ср. с леммой 1.

Утверждения леммы 2 сохраняют силу, только брать надо $A = A_o$, $B = B_o$, $C = C_o$.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. Разложим по главному реперу, связанному с телом в точке O , векторы ω и G_o :

$$\omega = p\mathbf{e} + q\mathbf{e}' + r\mathbf{e}'', \quad G_o = G\mathbf{e} + G'\mathbf{e}' + G''\mathbf{e}'', \quad (12.12)$$

затем продифференцируем кинетический момент

$$\Lambda_o = A p \mathbf{e} + B q \mathbf{e}' + C r \mathbf{e}'',$$

пользуясь формулами Пуассона (§ 11):

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}], \quad \frac{d\mathbf{e}'}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}'], \quad \frac{d\mathbf{e}''}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}''].$$

Векторное уравнение (10) приводит нас к уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = G, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = G', \\ C\dot{r} + (B - A)pq = G''. \end{cases} \quad (12.13)$$

Величины G , G' , G'' зависят, вообще говоря, от положения тела и его угловой скорости (т. е. совокупно — от его состояния), так что эта система уравнений в общем случае не замкнута.

СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА. Самый простой вариант уравнений (13) получается при $G = G' = G'' = 0$. Тогда система уравнений (13) становится замкнутой и описывает движение вектора ω относительно главного репера. Легко увидеть, что интегралами уравнений Эйлера в этом случае являются функции

$$\Lambda^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2, \quad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Например, то, что T — интеграл, получается так:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} = -p(C - B)qr - q(A - C)rp - \\ &\quad - r(B - A)pq = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, первых интегралов вполне достаточно, чтобы решить уравнения (13), а именно (подробности опускаем) можно получить решение в эллиптических функциях.

Исследуем решения качественно. Пусть $T = h$ и $\Lambda^2 = 2hD$. Будем считать для определенности $A > B > C$; тогда $D \in [C, A]$. Пересечение эллипсоидов $T = h$ и $\Lambda^2 = 2hD$ совпадает с пересечением

эллипсоида $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$ и конуса

$$A(A-D)p^2 + B(B-D)q^2 + C(C-D)r^2 = 0.$$

Если $D=C$, то $p=q=0$, что соответствует положениям равновесия на оси g . Если $C < D < B$, то движение по эллипсоиду $T=h$ происходит в I и III четвертях (см. рис. 75, где изображен вид сбоку). При $D=B$ конус распадается в пару плоскостей и движение происходит по сепаратрисам, проходящим через седловую точку равновесия 0. При $B < D < A$ движение происходит во II и IV четвертях, а при $D=A$ вектор угловой скорости постоянен и находится в крайней правой или крайней левой вершинах эллипсоида. На каждой траектории конца вектора ω нетрудно указать направление ее прохождения, выясняя знак $\dot{p}$ по знакам q и r из уравнений Эйлера.

Знание того, как движется вектор ω в теле, недостаточно, чтобы сразу представить себе движение самого тела. В принципе в духе § 11 можно написать

$$\dot{Q} = \Omega Q,$$

где Q — неизвестная ортогональная матрица перехода от неподвижного репера к подвижному главному, Ω — кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора ω . Получается система линейных уравнений, правда, неавтономная. Чувствуется, что такой прямолинейный путь не приведет нас к успеху. Поступим иначе. Заметим, что в случае Эйлера

$$\frac{d\Lambda_0}{dt} = G_0 = 0,$$

т. е. вектор кинетического момента $\Lambda_0 = \Lambda = \text{const}$ сохраняется в неподвижной системе координат.

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ. Для начала опишем движение в случае динамической симметрии $B=C$ (в частности, когда распределение масс имеет ось симметрии Oe). В этом случае из первого уравнения Эйлера вытекает, что

$$(\Lambda, e) = Ap = k = \text{const},$$

и этим интегралом можно воспользоваться вместо $\Lambda^2 = 2Bh + (A-B)A^{-1}k^2$.

Задача 37. Доказать, что

- а) вектор e оси динамической симметрии составляет постоянный угол с сохраняющимся вектором кинетического момента Λ ;
- б) вектор угловой скорости лежит в плоскости векторов e и Λ :

$$AB\omega = (B-A)ke + A\Lambda;$$

- в) угловое ускорение $d\omega/dt$ ортогонально Λ и e , причем

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 = \frac{|A-B|k}{AB^3} \sqrt{\Lambda^2 - k^2}.$$

Таким образом, движение можно представить себе как равномерное вращение вокруг вектора e , который в свою очередь равномерно поворачивается вокруг неподвижного вектора Λ .

ТЕОРЕМА ПУАНСО. Перейдем к общему случаю. В репере, связанном с телом, построим *эллипсоид инерции*

$$\{(\mathbf{r}, \gamma_0(\mathbf{r})) = 1\} = \{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1\},$$

где $\mathbf{r} = \xi\mathbf{e} + \eta\mathbf{e}' + \zeta\mathbf{e}''$. В случае Эйлера эллипсоид инерции катится без проскальзывания по неподвижной плоскости π , ортогональной кинетическому моменту Λ и отстоящей от точки O на расстоянии $\delta = \sqrt{2h}/|\Lambda| = 1/\sqrt{D}$.

Доказательство. Плоскость π в подвижном главном репере задается уравнением

$$\frac{Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \delta \quad \text{или} \quad Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2h},$$

где (ξ, η, ζ) — координаты точки плоскости в репере $Oee'e''$. Скорость $\mathbf{v}_P = 0$ в таких точках $P(\xi, \eta, \zeta)$, в которых $[\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}] = 0$, т. е.

$$\xi = \kappa p, \quad \eta = \kappa q, \quad \zeta = \kappa r.$$

Если мы выберем теперь $\kappa = 1/\sqrt{2h}$, точка P будет принадлежать как плоскости, так и эллипсоиду инерции, причем $\mathbf{v}_P = 0$, как и должно быть при качении. Остается показать, что эллипсоид касается плоскости π . Но это очевидно, так как нормали к плоскости и к эллипсоиду в точке P коллинеарны $(Ap, Bq, Cr) = \Lambda$.

Эллипсоид, катаясь по плоскости π , оставляет на ней след, называемый *герполодией*; точка касания с плоскостью на эллипсоиде описывает кривую, называемую *полодией*. Так как полодия высекается на эллипсоиде инерции направлением угловой скорости, то полодии совпадают с фазовыми кривыми уравнений Эйлера при $T = 1/2$. Герполодии располагаются на плоскости в некотором кольце и, вообще говоря, не замкнуты (рис. 47).

Задача 38. Если тело движется под действием пары сил с постоянным (в неподвижной системе координат) моментом $\mathbf{G}_O$ и при этом начальное состояние есть состояние покоя, то описание движения по Пуансо по-прежнему сохраняет силу. Доказать.

§ 13. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА—ЛАГРАНЖА ДЛЯ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Говорят, что задана *голономная механическая система*, когда

- 1) в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ есть N точек с массами m_v и радиусами-векторами $\mathbf{r}_v$;
- 2) заданы r равенств

$$f_\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \rho = 1, \dots, r, \quad (13.1)$$

называемых *голономными связями*;

- 3) даны выражения сил, действующих на точки:

$$\mathbf{F}_v(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad v = 1, \dots, N.$$

Положения системы — наборы $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — в силу нали-

чия связей не произвольны. *Многообразие положений системы*

$$\mathfrak{M}_t = \{ \mathbf{r} : f_p(\mathbf{r}, t) = 0, \quad p = 1, \dots, r \}$$

есть поверхность в $\mathbf{R}^{3N} = \mathbf{R}^3 \times \dots \times \mathbf{R}^3$, зависящая, вообще говоря, от времени. Требуется, чтобы

$$\text{rang} \left. \frac{\partial (f_1, \dots, f_r)}{\partial (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)} \right|_{\mathfrak{M}} = r;$$

тогда $\mathfrak{M}_t$ не имеет особенностей и $\dim \mathfrak{M}_t = 3N - r$ (это — *число степеней свободы системы*).

Зафиксируем произвольно мгновение t . Набор векторов $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ является касательным к многообразию положений $\mathfrak{M}_t$ в точке $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^{3N}$, когда

$$\sum_v \left(\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_v} \Big|_{\mathbf{g}}, \delta_v \right) = 0, \quad p = 1, \dots, r. \quad (13.2)$$

Касательный вектор можно трактовать как виртуальную скорость $\delta = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, где $\mathbf{r}(\alpha) \in \mathfrak{M}_t$ при фиксированном t .

Теперь «пустим часы». Если с течением времени

$$f(\mathbf{r}(t), t) = 0,$$

т. е. имеется перемещение системы, согласованное со связями, то набор скоростей $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ удовлетворяет уравнениям

$$\sum_v \left(\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_v}, \dot{\mathbf{r}}_v \right) + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0. \quad (13.3)$$

Сравнивая с (2), видим, что наборы скоростей являются касательными тогда, когда связи стационарны:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} \equiv 0.$$

При этом многообразие положений не зависит от времени.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА. Определение. Набор функций $\mathbf{r}(t) = \{\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)\}$ называется *движением* механической системы, если

1) удовлетворяются связи: $f_p(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \equiv 0$;

2) для любого касательного набора в положении $\mathbf{r}(t)$ справедливо

$$\sum (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v, \delta_v) = 0. \quad (13.4)$$

Комментарий. Последнее условие можно интерпретировать как условие ортогональности в $\mathbf{R}^{3N}$ (ср. с частным случаем динамики точки в § 5). Отсюда эквивалентная запись этого условия:

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v = \sum_p \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_v},$$

или

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{R}_v, \quad (13.5)$$

где векторы

$$\mathbf{R}_v = \sum_p \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_v}$$

называются *силами реакции связей*, или просто *реакциями*. Они легко могут быть вычислены как функции состояния, квадратичные по скорости (аналогично тому, как это было сделано для точки на поверхности в § 5). Если мы захотим постулировать закон Ньютона (5), то дополнительно придется потребовать, чтобы $\Sigma(\mathbf{R}_v, \delta_v) = 0$ для любого касательного набора (*аксиома идеальности связей*).

Обычно касательные наборы называются *возможными* (или *виртуальными*) *перемещениями* и обозначаются $\delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N)$.

ОДНА ТОЧКА. Допустим, точка находится в плоскости на кривой $f(x, y) = 0$. Вектор $\delta = (\delta x, \delta y)$ будет касательным к кривой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (13.6)$$

Допустим теперь, что мы из положения (x, y) на кривой сместились в положение $x + \delta x, y + \delta y$, т. е. совершили возможное перемещение $(\delta x, \delta y)$ в буквальном смысле термина. Тогда

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = 0.$$

Будем считать величины $\delta x, \delta y$ бесконечно малыми, т. е. стремящимися к нулю. Тогда

$$f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + O(\delta x^2 + \delta y^2) = 0.$$

Если мы согласимся вести все вычисления с точностью до бесконечно малых второго порядка, то увидим, что возможное перемещение должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (13.7)$$

Это в точности то же самое, что и (6). Таким образом, формально возможное перемещение получилось касательным вектором (или смещением по касательной). Трактую перемещение по касательной как бесконечно малое, мы с точностью до бесконечно малых более высоких порядков вправе считать, что имеем дело со смещением вдоль самой кривой. Оговорка «с точностью до бесконечно малых более высоких порядков», ненужная на уровне строгости классического анализа, отсутствует, к сожалению, в большинстве современных учебников.

Наряду с возможным обычно рассматривается также и *действительное перемещение*. В случае одной точки это бесконечно ма-

лый вектор $dr = vdt$. Если связь имеет вид $f(x, y, t) = 0$, то компоненты (dx, dy) действительного перемещения за время dt удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (13.8)$$

что не тождественно с (7), если $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$. Действительное перемещение отличается от приращения $r(t+\Delta t) - r(t)$ опять-таки на бесконечно малую более высокого порядка (рис. 7).

О связи принципа д'Аламбера — Лагранжа и различных видов уравнений движения в динамике точки уже говорилось в § 5. Проведенные тогда рассуждения можно обобщить, чем (частично) мы займемся ниже.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО. С точки зрения развиваемого формализма твердое тело есть *конечная система точек, попарные расстояния между которыми обязаны оставаться неизменными* (ясно, что непрерывные распределения масс с любой необходимой точностью могут быть аппроксимированы дискретными — собственно, на практике мы без колебаний поступаем как раз наоборот). Таким образом, наложено много связей вида:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0,$$

среди которых в принципе еще следует отобрать функционально независимые. Легко согласиться с тем, что выписывать связи такого рода не следует, так как если мы зададим положение трех (в плоском случае — двух) точек тела, то положение всего тела определится полностью. Интересны лишь те связи, которые наложены в дополнение к условиям неизменности расстояний.

Применительно к твердому телу становится совершенно недостаточным представлять себе касательные наборы просто как векторы в пространстве высокой размерности. Будем мыслить касательный набор в виде возможного перемещения:

$$\delta = (\delta g_1, \dots, \delta g_N).$$

Это — именно набор из N векторов, которые лежат в реальном пространстве $\mathbf{R}^3$ и приложены, разумеется, в точках $g_1, \dots, g_N$ соответственно. Примем для простоты, что дополнительные связи, наложенные на тело, не зависят от времени. Это позволит представить касательный набор в виде набора скоростей $g_1, \dots, g_N$. Поскольку мы имеем дело с твердым телом, лучше в данном случае говорить не о наборе, а о распределении скоростей, которое, как известно, характеризуется скоростью отмеченной точки тела (например, v_1) и его угловой скоростью ω . Наличие дополнительных связей ведет к тому, что векторы v_1 и ω не могут быть произвольными (как мы уже видели на примерах в предыдущем параграфе). Отсюда вывод: возможное перемещение твердого тела есть специфическое распределение трехмерных векторов, удовлетворяющее некоторым условиям.

Нечто аналогичное можно сказать и о любой системе точек со связями. Подчеркнем, что корректно определены возможные перемещения лишь всей системы точек в совокупности.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. Пусть $m = (m_1, \dots, m_N)$. Динамической функцией называется семейство скалярных или векторных функций

$$\Phi_m^N(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \Phi_{m_1, \dots, m_N}^N(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

удовлетворяющих следующим естественным условиям:

а) значение Φ^N не изменяется при перенумеровке масс:

$$\Phi_{m_1, \dots, m_N}^N(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \Phi_{m_{i_1}, \dots, m_{i_N}}^N(\dot{\mathbf{r}}_{i_1}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{i_N}, \mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_N});$$

б) $\Phi_{\lambda m}^N = \lambda \Phi_m^N$ (однородность);

в) $\Phi_{m_1+m_2}^N = \Phi_{m_1}^N + \Phi_{m_2}^N$ (аддитивность);

г) если $m_N = 0$, то

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, \dots, m_{N-1}, 0}^N(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \\ = \Phi_{m_1, \dots, m_{N-1}}^{N-1}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N-1}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}). \end{aligned}$$

Л е м м а. Динамические функции имеют вид

$$\Phi_m^N = \sum_v m_v \Phi(\dot{\mathbf{r}}_v, \mathbf{r}_v),$$

где $\Phi(\dot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0)$ — некоторая функция двух векторных аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по N :

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, \dots, m_N}^N(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \\ = \Phi_{m_1, \dots, m_{N-1}}^{N-1}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N-1}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}) + m_N \Phi(\dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_N). \end{aligned}$$

Детали оставляются в качестве упражнения.

П р и м е р ы динамических функций:

А) *импульс*

$$P_x = \sum_v m_v \dot{x}_v \quad (\Phi = \dot{x}_0),$$

$$\mathbf{P} = \sum_v m_v \dot{\mathbf{r}}_v \quad (\Phi = \dot{\mathbf{r}}_0);$$

Б) *кинетический момент*

$$\Lambda_{Oz} = \sum_v m_v (x_v \dot{y}_v - y_v \dot{x}_v) \quad (\Phi = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0),$$

$$\Lambda_O = \sum_v m_v [\mathbf{r}_v \times \dot{\mathbf{r}}_v] \quad (\Phi = [\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0]);$$

В) *кинетическая энергия*

$$T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2, \quad (\Phi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_0^2);$$

Г) *вириал*

$$J = \sum_v m_v (\mathbf{r}_v, \dot{\mathbf{r}}_v) \quad (\Phi = (\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0));$$

Д) *полный момент инерции*

$$I = \sum_v m_v \mathbf{r}_v^2 \quad (\Phi = \mathbf{r}_0^2)$$

и т. д.

При движении системы производная динамической функции

$$\frac{d\Phi_m^N}{dt} = \sum_v \left(m_v \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}, \dot{\mathbf{r}}_v \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}, \mathbf{F}_v \right) \right) + \sum_{v,p} \lambda_p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}, \frac{\partial f_p}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v} \right).$$

Если мы потребуем, чтобы для всех p

$$\sum_v \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}, \frac{\partial f_p}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v} \right) \equiv 0,$$

то производная будет иметь такой же вид, как и в случае движения свободных точек. Сейчас мы реализуем эту идею.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ. Следует запомнить, что в качестве посылки в них фигурируют некоторые условия на связи и что силы реакции в их формулировке не участвуют.

Теорема А (об изменении импульса). Если

$$\sum_v \frac{\partial f_p}{\partial x_v} \equiv 0,$$

или

$$\frac{d}{ds} f_p(x_1 + s, y_1, z_1, \dots, x_N + s, y_N, z_N, t) = 0,$$

т. е. связи допускают сдвиг вдоль оси x , то

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_v X_v.$$

Если к тому же $\sum X_v = 0$, то P_x — интеграл движения.

Теорема Б (об изменении момента). Если

$$\sum_v \left(x_v \frac{\partial f_p}{\partial y_v} - y_v \frac{\partial f_p}{\partial x_v} \right) \equiv 0,$$

т. е. связи допускают повороты вокруг неподвижной оси z (по-

следнее предлагается проверить), то

$$\frac{d\Lambda_z}{dt} = M_z = \sum_v (x_v Y_v - y_v X_v).$$

Если к тому же $M_z=0$, то Λ_z — первый интеграл.

Теорема В (об изменении кинетической энергии). Если связи стационарны, т. е.

$$\sum_v \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}_v} \dot{\mathbf{r}}_v = -\frac{\partial f_p}{\partial t} \equiv 0,$$

то

$$\frac{dT}{dt} = \sum_v (\mathbf{F}_v, \dot{\mathbf{r}}_v).$$

Если к тому же силы консервативны:

$$\mathbf{F}_v = \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_v},$$

то имеет место интеграл энергии $T+V=\text{const}$.

Теорема Г (об изменении вириала). Если связи допускают произвольную гомотегию с центром в начале координат, т. е.

$$\frac{d}{d\lambda} f_p(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N, t) = 0,$$

то производная от вириала равна

$$\frac{dJ}{dt} = 2T + \sum_v (\mathbf{F}_v, \mathbf{r}_v).$$

В частности, если

$$\mathbf{F}_v = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_v}; \quad V(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^n V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

то

$$\frac{dJ}{dt} = 2T - nV.$$

Теорема Д (об изменении момента инерции). Всегда

$$\frac{dI}{dt} = 2J.$$

Последние две теоремы были использованы в задаче многих тел (см. § 10).

Следствие теорем А и Б. Если связи допускают сдвиги вдоль любого направления и любые повороты вокруг неподвижной точки O , то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}_v, \quad \frac{d\Lambda}{dt} = \Sigma [\mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v],$$

а также

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \sum_v [\rho_v \times \mathbf{F}_v],$$

где $\Lambda_S = \sum_v m_v [\rho_v \times \dot{\rho}_v]$ — собственный кинетический момент (определяется так же, как и в § 10).

Это следствие лежит в основе динамики твердого тела.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИДЕАЛЬНОСТИ СВЯЗЕЙ. Допустим для простоты, что имеем одно плоское тело, а связи стационарны. Рассмотрим сначала случай, когда оно катится без проскальзывания по неподвижной кривой: наложены дополнительные связи. Реакции наложенных связей $\mathbf{R}_i$ образуют систему сил, которую элементарными преобразованиями можно привести к силе $\mathbf{R}$, приложенной в точке касания, и паре сил $\Phi, -\Phi$, приложенной, например, в отмеченных точках P_1, P_2 . Набор скоростей — всегда касательный, поэтому можно написать, что

$$\Sigma(\mathbf{R}_v, \dot{\mathbf{r}}_v) = (\mathbf{R}, \mathbf{v}_P) + (\Phi, \mathbf{v}_{P_1}) - (\Phi, \mathbf{v}_{P_2}) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{v}_P = 0$, сила $\mathbf{R}$ может быть направлена как угодно. Остальные слагаемые в силу $\mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{v}_{P_1} + [\omega \times \overline{P_1 P_2}]$ дают нам

$$(\Phi[\omega \times \overline{P_1 P_2}]) = (\omega, [\overline{P_1 P_2} \times \Phi]) = 0.$$

Поэтому момент пары равен нулю. Итак, *воздействие сил реакции дополнительных идеальных связей при качении сводится к появлению единственной силы $\mathbf{R}$ в точке касания*. Если допускается проскальзывание, то в результате аналогичных рассуждений (качение без проскальзывания по-прежнему возможно) опять момент пары равен нулю. Но, кроме качения, становится возможным также и проскальзывание, при котором $\mathbf{v}_P \neq 0$. Следовательно, при проскальзывании должно быть $(\mathbf{R}, \mathbf{v}_P) = 0$, т. е. сила $\mathbf{R}$ перпендикулярна кривой.

Аналогичную интерпретацию можно дать и другим способам введения реакций связей, обрисованным в § 12. В ситуации, когда связи стационарны, а силы $\mathbf{F}$ консервативны, условие идеальности связи приобретает следующий смысл: полная энергия $T + V$ по-прежнему сохраняется после наложения связей.

§ 14. КАЧЕНИЕ ШАРА (ПРИМЕР НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ)

Рассмотрим шар радиуса r , который обязан кататься по неподвижной плоскости Oxy без проскальзывания. Это значит, что всякий раз равна нулю скорость той его (самой нижней) точки P , в которой в данное мгновение происходит соприкосновение с плоскостью:

$$\mathbf{v}_S + [\omega \times \overline{SP}] = 0, \quad (14.1)$$

здесь S — центр шара. Пусть

$$\begin{aligned}\overline{OS} &= (x, y, r), \quad \omega = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{v}_S &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y, \quad \overline{SP} = -r \mathbf{e}_z;\end{aligned}$$

тогда

$$\dot{x} - r\omega_y = 0, \quad \dot{y} + r\omega_x = 0. \quad (14.2)$$

СВОЙСТВО НЕГОЛОНОМНОСТИ относится к связям, наложенным на шар, т. е. к предписаниям, к предварительным условиям, в силу которых ему позволено двигаться только так, чтобы тождественно выполнялись условия $z=r$ и (2). Эти связи неголономны в том смысле, что ограничивают распределение скоростей точек шара, но не мешают ему занять произвольное положение на плоскости.

Пусть в положении 1 тело касается плоскости в точке Q_1 точкой P_1 , а в положении 2 — в точке Q_2 точкой P_2 . Знание этих точек, разумеется, не определяет однозначно названных положений (сохраняется возможность вращать шар вокруг нормали к плоскости, проведенной в точке касания), но составляет основу доказательства вышевысказанного утверждения.

Это доказательство станет яснее, если мы сначала покажем голономную задачу: наложим на шар дополнительное ограничение — разрешим кататься только вдоль оси Ox (ср. с примером 1 из § 11 — качение диска по прямой). Теперь корректно определен угол поворота φ шара вокруг направления Oy , причем $\omega_y = \dot{\varphi}$, $\omega_z = \omega_x = 0$. Получаем

$$\dot{x} = r\dot{\varphi},$$

откуда после интегрирования (обратим внимание на эту операцию)

$$x = r\varphi + \text{const.}$$

При качении вдоль прямой соприкосновение с плоскостью происходит только в точках того большого круга, который проходит через P_1, P_2 . Ясно, что если длина дуги P_1P_2 отличается от расстояния $|\overline{Q_1Q_2}|$ на $2\pi rn$, то мы можем так прокатить тело по прямой, что из первого положения оно перейдет во второе, иначе — не можем.

Вернемся к исходной задаче. Непосредственно формулы (2) проинтегрировать мы не можем. В том ли только дело, что мы пока что не научились удачно вводить некоторые углы поворота φ, ψ с тем, чтобы получить $\omega_y = \dot{\varphi}, \omega_x = \dot{\psi}$? Нет. Никаких подобных переменных ввести невозможно, ибо ничто нам (вслед за Пуанкаре) не мешает нарисовать на поверхности шара кривую P_1P_2 длины $|\overline{Q_1Q_2}|$, прокатить шар, опираясь о плоскость точками этой дуги, а когда точки P_2 и Q_2 совместятся, повернуть тело до нужного положения, вращая его вокруг вертикали.

ШАР НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. На однород-

ный шар действуют две силы: вес mg , приложенный в центре S , и реакция опоры R , приложенная в точке касания P . Из соображений симметрии ясно, что

$$\Lambda_S = I\omega,$$

где I — центральный момент инерции шара. Нетрудно показать, что $I = (2/5)mr^2$. Уравнения движения суть

$$m \frac{dv_S}{dt} = mg + R, \quad (14.3)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = [\overline{SP} \times R]. \quad (14.4)$$

Легко увидеть, что $(\dot{v}_S, \overline{SP}) = 0$ (по условию) и $(\dot{\omega}, SP) = 0$ (из второго уравнения). Пусть $R_{\parallel}$ — компонента силы реакции, параллельная плоскости. Тогда

$$m\dot{v}_S = R_{\parallel}, \quad I\dot{\omega} = [\overline{SP} \times R_{\parallel}].$$

Подставляя первое во второе и используя (1), получаем

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= m[\overline{SP} \times \dot{v}_S] = m[\overline{SP} \times [\overline{SP} \times \dot{\omega}]] = m\overline{SP}(\overline{SP}, \dot{\omega}) - \\ &- m(\overline{SP})^2 \dot{\omega} = -mr^2 \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} \equiv 0 \Rightarrow \dot{v}_S = 0 \Rightarrow R_{\parallel} = 0. \end{aligned}$$

Шар катится равномерно и вращается равномерно.

Задача 39. Шар катится по горизонтальной плоскости, которая перемещается вдоль самой себя со скоростью $u(t)$ поступательно. Пусть на плоскости нарисована кривая. Доказать, что можно так двигать плоскость, что шар будет катиться по этой кривой.

Указание. Получить соотношение

$$\frac{dv_{o.r.}}{dt} = -\frac{5}{7} \frac{du}{dt}$$

и использовать его.

Задача 40. Шар катится по горизонтальной плоскости, которая вращается с вертикальной угловой скоростью Ω . Показать, что с точки зрения неподвижного наблюдателя шар катится по окружности (и вовсе не «укатывается в бесконечность»).

Указание. Получить соотношение

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{7} \frac{d}{dt} [\Omega \times \overline{OP}] = \frac{2}{7} [\Omega \times v]$$

и использовать его.

ШАР В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ. Продолжим знакомство со странностями движения при наличии «неголономных связей». Пусть шар катится без проскальзывания в неподвижном цилиндре радиуса $\rho + r$. Система уравнений движения:

$$v_S + [\omega \times \overline{SP}] = 0, \quad (14.5)$$

$$m \frac{dv_S}{dt} = mg + R, \quad (14.6)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = [\overline{SP} \times R] = m \left[\overline{SP} \times \left[\frac{dv_S}{dt} - g \right] \right]. \quad (14.7)$$

Теперь, в отличие от вышеприведенных задач, $\overline{SP}$ уже не имеет постоянного направления. Это неудобство можно ослабить, воспользовавшись вращающейся системой координат $O\xi\eta\zeta$, в которой центр масс находится все время в плоскости $O\xi\zeta$, а ось $O\zeta$ совпадает с осью цилиндра. Будем все векторы раскладывать по реперу e_ξ, e_η, e_ζ . При дифференцировании векторов непременно надо учитывать, что векторы e_ξ, e_η вращаются. Пусть φ — угол поворота нашей системы координат вокруг оси $O\zeta$, z — вертикальная координата центра шара. Выкладки начнем с разложений

$$OS = \rho e_\xi + z e_\zeta, \quad \omega = \omega_\xi e_\xi + \omega_\eta e_\eta + \omega_\zeta e_\zeta.$$

Выполняя дифференцирования этих векторов с учетом

$$\dot{e}_\xi = \dot{\varphi} e_\eta, \quad \dot{e}_\eta = -\dot{\varphi} e_\xi,$$

и подставляя в (5), (7), получим в проекциях на e_ξ, e_η, e_ζ

$$\rho \dot{\varphi} = -r \omega_\zeta, \quad (14.5\xi)$$

$$\dot{z} = r \omega_\xi, \quad (14.5\zeta)$$

$$(2/5) (\dot{\omega}_\xi - \dot{\varphi} \omega_\eta) = 0, \quad (14.7\xi)$$

$$(2/5) m r^2 (\dot{\omega}_\eta + \omega_\xi \dot{\varphi}) = (-r \ddot{z} + r g) m, \quad (14.7\eta)$$

$$(2/5) m r^2 \dot{\omega}_\zeta = r \rho \ddot{\varphi}. \quad (14.7\zeta)$$

Из (5\xi) и (7\zeta)

$$\dot{\omega}_\zeta = 0, \quad \omega_\zeta = c_1 = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -(r/\rho) c_1 = \text{const}.$$

Из (7\xi) и (5\zeta)

$$0 = \dot{\omega}_\xi - \omega_\eta \dot{\varphi} = \dot{\omega}_\xi + \frac{\dot{z}}{r} \frac{r}{\rho} c_1 = \dot{\omega}_\xi + \frac{\dot{z}}{\rho} c_1,$$

$$\omega_\xi + \frac{z}{\rho} c_1 = c_2 = \text{const}.$$

Внеся все полученное в (7\eta), получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} r \left(\underbrace{\ddot{z}}_{\omega_\eta} - \underbrace{\left(c_2 - c_1 \frac{z}{\rho} \right)}_{\omega_\xi} \frac{r}{\rho} c_1 \right) &= -\ddot{z} - g, \\ \ddot{z} + \underbrace{\frac{2}{7} \frac{r^2}{\rho} c_1 z}_{k} &= \underbrace{\frac{2}{7} \frac{c_1 c_2 r^2}{\rho}}_{k} - \frac{5}{7} g. \end{aligned}$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$z(t) = \frac{K}{k} + A \cos \sqrt{k} (t - t_0).$$

Следовательно, шар движется вверх-вниз по синусоидальному закону.

Задача 41. Показать, что

а) наряду с интегралами:

$$\omega_z = c_1, \quad \omega_\xi + \frac{z}{\rho} \omega_z = c_2,$$

есть еще интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + I \frac{\omega^2}{2} + mgz = h;$$

б) амплитуда колебаний по z при начальных условиях $\omega_0 \| e_z$ (для простоты) равна

$$\frac{5}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \frac{g}{\omega_0^2}.$$

Странность поведения шара в цилиндре до некоторой степени объясняется тем, что все взаимодействие шара с поверхностью цилиндра мы свели к появлению единственной силы, приложенной в единственной точке касания. На деле взаимодействие, разумеется, сложнее. Тем не менее при игре в баскетбол иногда можно наблюдать, как мяч, уже оказавшийся несколько ниже кольца, вдруг выкатывается из него.

§ 15. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. ПРИВЕДЕНИЕ ПО РАУСУ

Рассматривается голономная система с потенциальными силами: $\mathbf{F}_v = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_v}$, причем потенциалу пока что не возбраняется зависеть от времени. Пусть на многообразии положений $\mathcal{M}_t$ имеются локальные координаты $q_1, \dots, q_n$, в силу чего

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_1, \dots, q_n, t), \quad v = 1, \dots, N.$$

Следовательно, скорости

$$\dot{\mathbf{r}}_v = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}. \quad (15.1)$$

В каждой точке $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathcal{M}_t$ есть n линейно независимых наборов, касательных к $\mathcal{M}_t$:

$$\delta_i = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_i} \right\}$$

(согласно замечанию о дифференцировании при фиксированном t из предыдущего параграфа). Подставим эти касательные наборы в основное уравнение принципа д'Аламбера — Лагранжа:

$$\sum_v \left(m_v \ddot{\mathbf{r}}_v, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) = \sum_v \left(\mathbf{F}_v, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right).$$

Справа имеем

$$\sum_v \left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_v}, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad V(q, t) = V(\mathbf{r}(q, t), t).$$

Преобразуем левую часть, используя соотношения:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i},$$

которые легко выводятся из (1):

$$\begin{aligned} \sum_v m_v \left(\ddot{\mathbf{r}}_v, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) &= \frac{d}{dt} \sum_v m_v \left(\dot{\mathbf{r}}_v, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) - \sum_v m_v \left(\dot{\mathbf{r}}_v, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_v m_v \left(\dot{\mathbf{r}}_v, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) - \sum_v m_v \left(\dot{\mathbf{r}}_v, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_v m_v \frac{\dot{\mathbf{r}}_v^2}{2} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_v \frac{m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

где кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2 = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t)$$

в силу (1). В итоге приходим к

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad L = T - V, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15.2)$$

Принцип д'Аламбера—Лагранжа для голономных систем с потенциальными силами эквивалентен уравнениям Лагранжа (2).

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ КАК ФУНКЦИЯ СКОРОСТЕЙ

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_v m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2 = \frac{1}{2} \sum_v m_v \left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_v m_v \left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}, \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_v m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i \sum_v m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_v m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i a_i \dot{q}_i + a = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

где T_p обозначает однородную форму скоростей степени p . Если $T = T_2$, то мы имеем так называемую классическую натуральную систему.

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ. Если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$, то имеет место интеграл «энергии» (в кавычках)

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Этот факт не зависит от структуры L . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \\ &- \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Для механической системы имеем так называемый интеграл Якоби—Пенлеве:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - T_2 - T_1 - T_0 + V = \\ &= 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + V = T_2 - T_0 + V = h, \end{aligned}$$

который, что интересно, не содержит T_1 . Поскольку T_2 положительно определена, область возможности движения $\mathfrak{M}^h = \{-T_0 + V \leq h\}$. Для классических натуральных систем $\mathfrak{M}^h = \{V \leq h\}$, а H интеграл энергии (без кавычек).

Задача 42. Шар с невесомой штангой из задачи 32 (§ 11) катится по наклонной плоскости; дано: $d = r \operatorname{tg} \theta$, масса m , моменты инерции $A = B = C = (2/5)mr^2$, угол наклона плоскости β , $\varphi = 0$ — направление наибольшего наклона. Доказать, что

а) уравнение Лагранжа имеет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{5}{7} \frac{g}{d} \sin \beta \sin \varphi;$$

б) полная энергия равна

$$H = \frac{7}{10} m d^2 \dot{\varphi}^2 - m g d \sin \beta \cos \varphi;$$

в) если h — константа энергии, то шар может двигаться с $H = h$, не отрываясь от плоскости (принято $R_n \equiv 0$) в области

$$\mathfrak{M}^h = \{-\sin \beta \cos \varphi \leq h_1, (2/3)h_1 + (1/3)\cos \beta \operatorname{tg} \theta\},$$

где h_1 — безразмерная энергия: $h_1 = h/mgd$. На рис. 12 $\psi = \varphi$.

Задача 43. В поле силы тяжести имеется трубка в форме кольца, вращающаяся с угловой скоростью $v = \dot{\psi}$ вокруг вертикальной оси; в ней скользит точка массы m (см. задачу 31 в § 11). Найти:

а) ОВД $\mathfrak{M}^h$, где h — константа интеграла Якоби;

б) положения равновесия системы и частоты малых колебаний около них.

$$\text{Неполный ответ: а) } \mathfrak{M}^h = \left\{ \cos^2 \theta - \frac{2g}{rv^2} \cdot h_1 - \frac{2g}{v} \cos \theta - 1 \leq 0 \right\},$$

где $h_1 = h/mgr$ — «безразмерная энергия»; б) при $v^2 \geq g/r$ имеются положения равновесия в точках $\theta_* = \pm \arccos(g/rv^2)$ с частотой малых колебаний $\omega = \sqrt{v^4 - g^2/r^2}/v$.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. О них уже шла речь в динамике точки. Не повторяя всех определений, напомним, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv \text{const}$$

(циклический, или кинестенический, интеграл). В случае классической натуральной системы он линеен по скоростям:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i a_{ji} \dot{q}_i.$$

Теорема, доказанная для движения по поверхности, без труда обобщается: всякий линейный интеграл натуральной системы можно представить как циклический в некоторой системе координат.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА. Пусть есть $n-m$ циклических интегралов:

$$J_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+s}} = c_s, \quad s = 1, \dots, n-m. \quad (15.3)$$

Лагранжиан не зависит от координат $q_{m+1}, \dots, q_n$, но зависит, конечно, от скоростей $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$. Наша цель — вообще исключить функции $q_{m+s}(t)$ из рассмотрения.

Теорема Рауса. Пусть наборы $q_1(t), \dots, q_m(t), q_{m+1}(t), \dots, q_n(t)$ — решения системы Лагранжа (2), на которых циклические интегралы принимают заранее заданные значения $c = (c_1, \dots, c_{n-m})$. Тогда усеченные наборы $q_1(t), \dots, q_m(t)$ удовлетворяют уравнениям лагранжевой структуры:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (15.4)$$

в которых так называемая функция Рауса

$$R_c = L - \sum_s c_s \dot{q}_{m+s}, \quad (15.5)$$

причем скорости $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ выражены через $c_1, \dots, c_{n-m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, q_1, \dots, q_m, t$ из системы (3).

Уравнения (4) составляют так называемую приведенную систему.

Доказательство. Полный дифференциал функции Рауса (5)

$$\begin{aligned} dR_c &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} R_c dt = \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s+m}} d\dot{q}_{s+m} - \end{aligned}$$

$$-\sum_{s=1}^{n-m} c_s d\dot{q}_{m+s} = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

и осталось подставить в уравнения Лагранжа.

Лемма. Дана автономная система с двумя степенями свободы:

$$L = \frac{1}{2}(\alpha \dot{q}_1^2 + 2\gamma \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta \dot{q}_2^2) - V.$$

Тогда при наличии циклической координаты q_2 функция Рауса

$$R_c = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} \dot{q}_1^2 - \left(\frac{c^2}{2\beta} + V \right). \quad (15.6)$$

В самом деле, $J = \gamma \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 = c$ влечет $\dot{q}_2 = \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1)$,

$$\begin{aligned} R_c &= \frac{1}{2}(\alpha \dot{q}_1^2 + 2\gamma \dot{q}_1 \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1) + \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1)^2) - \\ &- V - c\beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} \dot{q}_1^2 - \frac{c\gamma}{\beta} \dot{q}_1 - \left(\frac{c^2}{2\beta} + V \right). \end{aligned}$$

Слагаемое $c\gamma\beta^{-1}\dot{q}_1$ можно отбросить в силу того, что приведенная система имеет одну степень свободы:

Задача 44. Пусть $n=1$. Тогда, если к $L(\dot{q}, q)$ прибавить $f(q)\dot{q}$, то уравнение Лагранжа не изменится. При $n=2$ это в общем случае уже не так. Доказать.

Частный случай (6) мы имели в случае центрального поля сил в плоскости. Функция $V_c = c^2/2\beta + V$ называется приведенным потенциалом системы с лагранжианом L .

Задача 45. Прямая трубка длиной $2l$ лежит концами на горизонтальной окружности и может свободно по ней скользить. В трубке от середины к концу движется точка с относительной скоростью v_0 . Масса точки m_2 , масса трубки m_1 (рис. 33).

а) Какие есть интегралы согласно лагранжевому формализму и какие общие теоремы динамики системы точек применимы?

б) Пусть при $t=0$, $\Theta(0)=\dot{\Theta}_0$, $\Theta(0)=\Theta_0$; требуется найти $\Theta(t)$.

О т в е т:

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \frac{a}{v_0} \dot{\Theta}_0 \arctg \frac{v_0 t}{a}, \quad a = \sqrt{d^2 + \frac{m_1}{m_2} \left(d^2 + \frac{l^2}{3} \right)}.$$

Задача 46. В поле силы тяжести точка массой m движется по верхней половине конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Найти: а) $\mathfrak{M}_c^h$, где h — константа энергии, mc — константа циклического интеграла (здесь φ — угловая циклическая координата в цилиндрических координатах (z, r, φ)); б) частоту малых колебаний в приведенной системе.

Ответ: а) $\mathfrak{M}_c^h = \left\{ \frac{mc^2}{2r^2} + mgr \leq h \right\}$; б) $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{g^2/c}$.

Задача 47. В поле силы тяжести внутри вращающегося обруча массой m_1 , могущего поворачиваться вокруг центра, катается обруч массой m_2 . Радиусы обручей — ρ и r (рис. 34).

а) Получить циклический интеграл $(m_1 + m_2)\rho\dot{\psi} - m_2(\rho - r)\dot{\Theta}$. Пояснить, почему этот интеграл не получается по общим теоремам.

б) Показать, что частота малых колебаний около $\Theta = 0$ равна

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2} \frac{g}{\rho - r}}.$$

Почему она не зависит от постоянной циклического интеграла?

Задача 48. Пусть имеется натуральная система с интегралами (3). Положим $Q_1 = (q_1, \dots, q_n)$, $Q_2 = (q_{n+1}, \dots, q_n)$ и представим L в виде

$$L = \frac{1}{2} \dot{Q}_1 \cdot A_1 \dot{Q}_1 + \frac{1}{2} \dot{Q}_2 \cdot A_2 \dot{Q}_2 + \dot{Q}_1 \cdot A_{12} \dot{Q}_2 - V,$$

где A_1, A_2, A_{12} — матрицы, зависящие от q, t (здесь Q_1, Q_2 мы считаем векторами-столбцами). Показать, что функция Рауса

$$R_c = \frac{1}{2} \dot{Q}_1 \cdot [A_1 - A_{12} A_2^{-1} A_{12}^*] \dot{Q}_1 + A_{12} A_2^{-1} c \cdot \dot{Q}_1 - \left[V + \frac{1}{2} c \cdot A_2^{-1} c \right]. \quad (15.7)$$

В ней, вообще говоря, имеются слагаемые, линейные по скоростям $\dot{q}_i$. Последнее слагаемое называется *приведенным потенциалом*. Можно показать, что матрица $A_1 - A_{12} A_2^{-1} A_{12}^*$ положительно определена.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДЛЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА—ПУАССОНА. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести (вектор вертикали $\mathbf{f} = \mathbf{e}_z$), предполагая, что моменты инерции $B = C$ и центр масс лежит на оси динамической симметрии Oe на расстоянии l от O . В частности, тело может быть просто осесимметрично.

Пусть θ, ψ — сферические координаты для вектора $\mathbf{e}$ (см. (8.7)); здесь они называются углами нутации и прецессии. Чтобы однозначно определить положение тела, введем еще угол его собственного вращения φ вокруг вектора Oe , например угол между плоскостью векторов $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}$ и вектором $\mathbf{e}''$ из главного репера. Угловая скорость ω линейно зависит от $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$; следовательно, для вычисления ее достаточно рассмотреть частные движения те-

ла, когда меняется только один из углов θ , φ , ψ , а два другие постоянны: общий результат будет суммой трех частных. В результате легко получаем (рис. 13)

$$\omega = \dot{\psi} \mathbf{f} + \dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\theta} \frac{[\mathbf{f} \times \mathbf{e}]}{\sin \theta}. \quad (15.8)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{f} = \cos \theta \mathbf{e} + \sin \theta (\sin \varphi \mathbf{e}' + \cos \varphi \mathbf{e}''), \quad (15.9)$$

приходим к таким выражениям компонент ω в главном репере:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Кинетическая и потенциальная энергия

$$\begin{aligned} 2T &= Ap^2 + B(q^2 + r^2) = B\dot{\theta}^2 + (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \dot{\psi}^2 + \\ &\quad + 2A\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta + A\dot{\varphi}^2, \\ V &= (\mathbf{f}, Mgl\mathbf{e}) = Mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Видим, что в лагранжиане $L = T - V$ координаты φ , ψ являются игнорируемыми, а соответствующие интегралы суть

$$J_{\psi} = (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \dot{\psi} + A \dot{\varphi} \cos \theta = c, \quad (15.12)$$

$$J_{\varphi} = A\dot{\psi} + A\dot{\varphi} \cos \theta = k. \quad (15.13)$$

Исключить можно сразу обе переменные, но мы начнем с того, что исключим только φ . Получим

$$R_k(\dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta, \psi) = \frac{B}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + k\dot{\psi} \cos \theta - \left(Mgl \cos \theta + \frac{k^2}{2A} \right).$$

При $k=0$ получаем (с точностью до обозначений) лагранжиан сферического маятника, а при $k \neq 0$ к нему прибавляется линейное по скорости слагаемое (постоянная $k^2/2A$ несущественна).

Изменение θ , ψ со временем описывает самое для нас интересное в движении волчка Лагранжа—Пуассона (особенно если он осесимметричен) — поведение оси Oe . Исследуем его качественно.

Вместо того чтобы понижать порядок второй раз, мы просто выпишем интегралы движения:

$$\frac{B}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + Mgl \cos \theta + \frac{k^2}{2A} = h,$$

$$B \sin^2 \theta \dot{\psi} + k \cos \theta = c$$

(последний можно получить и исключением ψ из (12), (13)). Отсюда, как и для сферического маятника,

$$\frac{B}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(c - k \cos \theta)^2}{2B \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta + \frac{k^2}{2A} = h,$$

$$V_{ck}(\theta) = \frac{(c - k \cos \theta)^2}{2B \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta + \frac{k^2}{2A} \leq h.$$

Угол $\theta(t)$ колеблется в некоторых пределах $[\theta_1(c, k, h), \theta_2(c, k, h)]$ и может быть найден интегрированием уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{B} (h - V_{ck}(\theta))}.$$

Что касается $\psi(t)$, то потом надо будет интегрировать

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c - k \cos \theta(t)}{B \sin^2 \theta(t)}.$$

Видим, что $\psi(t)$ будет монотонной функцией, если $\arccos c/k \in [\theta_1, \theta_2]$. Тогда вектор $\mathbf{e}(t)$ описывает волнообразную кривую (рис. 66, а). В противном случае на кривой появятся петли (рис. 66, б). Таким образом, появление линейного члена в функции Рауса R_k приводит к своеобразному закручиванию траекторий вектора $\mathbf{e}(t)$.

В заключение отметим, что формулы (8)–(10) позволяют по аналогии с (11) написать лагранжиан и в общем случае движения твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести.

§ 16. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

Будем отталкиваться от уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16.1)$$

где $L = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t)$ (структура L пока роли не играет). Потребуем, чтобы определитель

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0, \quad (16.2)$$

и рассмотрим систему соотношений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (16.3)$$

Величины p_i называются *обобщенными*, или *каноническими, импульсами*. Они могут рассматриваться либо непосредственно как функции $\dot{q}, q, t$, либо как независимые переменные. В последнем случае в силу (2) из системы (3) можно получить выражения

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t).$$

Функцией Гамильтона, или гамильтонианом, называется «энергия», выраженная через p, q, t :

$$H = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) \Big|_{\dot{q}(p, q, t)}.$$

Пространство переменных (p, q) называется *фазовым*.

Теорема. Система n уравнений второго порядка (1) эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

(уравнениями Гамильтона называются уравнения именно такого вида, где H в принципе может быть любой функцией).

Доказательство. Вычисляем полный дифференциал функции H :

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i dq_i - \\ &- \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{dp_i}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание. Гамильтониан (равно как и лагранжиан) часто называют характеристической функцией: это значит, что в выражении $H(p, q, t)$ как бы зашифрованы все индивидуальные черты системы уравнений движения. В частности, выражения лагранжевых скоростей $\dot{q}_i$ через p, q, t совпадают, разумеется, со второй группой уравнений Гамильтона.

Вопрос. Как восстановить лагранжиан, зная гамильтониан?

ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ СЕКРЕТ. Из только что сказанного вытекает, что при применении гамильтонова формализма в конкретной задаче главное — выписать функцию H . Для этого гораздо удобнее не универсальная схема, изложенная в начале параграфа, а простые следствия ее, учитывающие специфику реальных лагранжианов. Чаше всего встречаются натуральные системы; поэтому пусть

$$L = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A \dot{q} - V, \quad (16.4)$$

где $A = (a_{ij})$ — положительно определенная (и потому невырожденная) симметричная матрица коэффициентов живой силы. Тогда $p = A\dot{q}$, $\dot{q} = A^{-1}p$, и гамильтониан (полная энергия без кавычек)

$$H = \frac{1}{2} p \cdot A^{-1} p + V. \quad (16.5)$$

Итак, если кинетическая энергия — квадратичная форма скоростей с матрицей A , то гамильтониан содержит квадратичную форму импульсов с обратной матрицей A^{-1} . Например:

а) для точки в плоскости в декартовых координатах (x, y)

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y);$$

б) для точки в центральном поле сил в полярных координатах (r, φ)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r).$$

ПЕРВЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ. Впредь считаем, что H не зависит от времени t . Тогда эта функция является первым интегралом соответствующих уравнений Гамильтона:

$$\frac{dH}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0.$$

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ — это те и только те точки $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, в которых правые части уравнений Гамильтона, т. е. все частные производные функции $H(p, q)$, обращаются в нуль (критические точки функции H).

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. Число n называется *числом степеней свободы* гамильтоновой системы порядка $2n$ независимо от природы функции H . Пусть $n=1$. Тогда уровни функции $H(p, q)=h$ на фазовой плоскости состоят из траекторий решений системы уравнений Гамильтона и образуют так называемый фазовый портрет системы. При его графическом изображении принято рисовать положения равновесия и несколько характерных фазовых кривых. В случае натуральной системы

$$L = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 - V(q),$$

$$H = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q) = h,$$

$$p = \pm \sqrt{2A(q)(h - V(q))}.$$

Таким образом, при заданной энергии h импульс p может принимать в общем случае два значения, отличающихся знаком, пока q принадлежит области возможности движения $\mathcal{M}^h = \{V(q) \leq h\}$. Иными словами, множество $\mathcal{M}^h$ есть образ фазовой кривой $H(p, q)=h$ при отображении проектирования $(p, q) \rightarrow q$.

Пример. Круговой маятник (см. § 4): $H = p^2/2 - \cos \varphi$ (для определенности $m=q=l=1$). Фазовый портрет этой задачи (рис. 75) очень прост и вместе с тем нетривиален в том смысле, что содержит характерные черты фазовых портретов вообще. Это

1) *устойчивые* (ср. с § 4) *состояния равновесия* $E_0, E_{2\pi}, \dots$, окруженные замкнутыми фазовыми кривыми; последние в проекции на ось q дают область возможности движения в виде отрезка;

2) *неустойчивые состояния равновесия* $E_{-\pi}, E_{\pi}, E_{3\pi}, \dots$, представляющие собой особые точки типа «седло»;

3) помимо состояний равновесия, при $h=1$ возможны движения, которые стремятся к этому состоянию при $t \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow -\infty$ (соответствующие участки уровня называются *сепаратрисами*).

Смысл последнего термина в том, что кривые $h=1$ отделяют один качественный тип движения от другого: при $h>1$ импульс сохраняет знак, следовательно, dq/dt в нуль не обращается, и маятник движется все время в одну и ту же сторону; при $-1 < h < 1$ движение носит колебательный характер.

Уточнение 1. Рассматривая эту задачу как идеализацию реальной системы, мы подразумеваем, что масса m подвешена не на нити, а на невесомом стержне, который не позволит покинуть ей окружность $x^2 + y^2 = l^2$ (другой вариант — бусинка, насаженная на проволочное кольцо). В задаче о массе, подвешенной на нити, рассмотренной в § 4, учитывалась возможность того, что нитка может ослабнуть. Соответствующие состояния образуют целую область в $\mathbf{R}^2(p, q)$, которая на рис. 75 заштрихована.

Уточнение 2. Строго говоря, многообразие положений в задаче о круговом маятнике является окружностью S^1 . Поэтому надо учесть, что точки $(q + 2\pi n, p)$ отвечают одному и тому же состоянию (это условно обозначается записью $q \bmod 2\pi$). Чтобы получить взаимно-однозначное соответствие между состояниями маятника и точками фазового портрета, надо отождествить точки плоскости $\mathbf{R}^2(p, q)$, у которых координата q отличается на $2\pi n$. При этом полосы $2\pi n \leq q < 2\pi(n+1)$ как бы наложатся друг на друга, а правая и левая границы у каждой из них склеются (так же, как при изготовлении цилиндра из прямоугольного листа бумаги). В результате получим цилиндр — прямое произведение $S^1 \times \mathbf{R}^1$ окружности S^1 на прямую $\mathbf{R}^1$. Как итог отождествлений он обозначается так: $\mathbf{R}^1 \times S^1 = \mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}$ (цилиндр есть результат факторизации плоскости $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ по группе сдвигов на $2\pi n$ в одном из сомножителей).

Задача 49 (рис. 34). Большой обруч вращается в вертикальной плоскости со скоростью $\dot{\psi} = \epsilon t$; θ — угол отклонения центра маленького обруча, катающегося внутри; ρ — радиус большого обруча, r — радиус малого обруча, его масса — m . а) Написать лагранжиан $L(\theta, \dot{\theta}, t)$, б) выписать уравнения движения, в) подобрать другой лагранжиан $\tilde{L}(\theta, \dot{\theta})$, дающий те же уравнения, г) написать соответствующий гамильтониан, д) нарисовать фазовые портреты при $\epsilon < \frac{g}{\rho - r}$ и $\epsilon > \frac{g}{\rho - r}$. Считать, что малый обруч все время прилегает к большому.

Задача 50. Нарисовать фазовый портрет а) приведенной системы сферического маятника (изобразить также зону невозможности движения, если маятник — точка на нити); б) для задачи 43 при $v^2 < g/r$ и $v^2 > g/r$. Сравнить оба портрета и объяснить различие.

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И СКОБКА ПУАССОНА. Пусть $F(p, q)$ — некоторая функция обобщенных координат и импуль-

сов. Тогда в силу уравнений системы с гамильтонианом H

$$\frac{d}{dt}F = \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right). \quad (16.6)$$

Определение. Если F и G — две функции переменных p и q , то их скобкой Пуассона называется функция

$$(F, G) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right). \quad (16.7)$$

Из (6) видим, что F есть первый интеграл системы с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда

$$(F, H) \equiv 0. \quad (16.8)$$

Говорят при этом, что функции F и H находятся в инволюции.

АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ. Из определения (7) вытекают следующие свойства скобок Пуассона:

- (П1) кососимметричность $(F, G) = -(G, F)$;
- (П2) линейность $(F, \alpha G + \beta H) = \alpha(F, G) + \beta(F, H)$;
- (П3) тождество Пуассона (Якоби):

$$((F, G), H) + ((H, F), G) + ((G, H), F) = 0.$$

Первые два свойства тривиальны. Третье доказывается прямой, но длинной выкладкой; позднее будет указан короткий вывод. Перечисленные свойства означают, что бесконечно дифференцируемые функции переменных p, q образуют алгебру Ли.

Теорема Пуассона. Если F, G — первые интегралы системы с гамильтонианом H , то (F, G) — тоже первый интеграл.

Доказательство. Перепишем тождество Пуассона, используя свойство кососимметричности, и учтем (8):

$$((F, G), H) = ((F, H), G) - ((G, H), F) = (0, G) + (0, F) \equiv 0.$$

Этот факт важен в идейном отношении (первые интегралы гамильтоновой системы образуют подалгебру в алгебре всех функций), но практически бесполезен: полученный таким образом интеграл всегда выражается через уже известные.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОБОК ПУАССОНА. Для этого используются, помимо уже отмеченных, дальнейшие свойства скобок Пуассона:

- (П4) $(F, G_1 \cdot G_2) = G_1(F, G_2) + G_2(F, G_1)$ (правило Лейбница);

$$(П5) (\varphi(F_1, \dots, F_k), G) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial F_i}(F_i, G) \quad (\text{правило сложной функции});$$

- (П6) $G_i(p, q) = G_i(p_i, q_i) \Rightarrow (G_i, G_j) \equiv 0$ (правило разных пар);

(П7) $(q_i, p_i) = 1, (p_i, q_i) = -1$ (ненулевые координатные скобки).

Докажем (П5):

$$\begin{aligned}(\varphi(F_1, \dots, F_k), G) &= \sum_i \left(-\frac{\partial \varphi(F_1, \dots, F_k)}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi(F_1, \dots, F_k)}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = \\&= \sum_i \left(-\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial F_{\alpha}} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial G}{\partial q_i} + \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial F_{\alpha}} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = \\&= \sum_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial F_{\alpha}} \sum_i \left(-\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).\end{aligned}$$

Вопрос. Как вывести свойства (П1), (П2), (П4) не из выражения скобок Пуассона, а из свойства (П5)?

Более сложный вопрос: как вывести (П5) из (П1), (П2), (П4)?

Задача 51 (иллюстрация к теореме Пуассона и комментарию к ней). Рассмотрим движение точки массы m в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ в поле с потенциалом $V(x, y, z)$. Тогда

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z).$$

Требуется выразить компоненты кинетического момента $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ через переменные p_x, p_y, p_z, x, y, z и показать, что

а) если $V = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, то

$$(\Lambda_x, H) = (\Lambda_y, H) = (\Lambda_z, H) = 0,$$

т. е. $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ являются первыми интегралами;

б) попарные скобки Пуассона этих функций суть

$$(\Lambda_x, \Lambda_y) = +\Lambda_z, \dots; \quad (16.9)$$

в) функции Λ_z и $\Lambda^2 = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2$ находятся в инволюции.

СТРУКТУРА ГАМИЛЬТОНИАНА И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. Здесь приводятся самые простые наблюдения.

1. Если $\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$, то q_i — первый интеграл; если $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, то p_i — первый интеграл (естественно, он называется циклическим).

2. *Отделение переменных.* Если гамильтониан есть функция от некоторой функции $f(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$ и от $p_{m+1}, \dots, p_n, q_{m+1}, \dots, q_n$, то f — первый интеграл.

Действительно, пусть $H = \Phi(f, p_{m+1}, \dots, p_n, q_{m+1}, \dots, q_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}(f, H) &= \sum_1^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \\&= \sum_1^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 0.\end{aligned}$$

3. *Полное разделение переменных:*

$$H = \sum H_i(q_i, p_i).$$

Тогда H_i — первые интегралы, попарно находящиеся в инволюции. Более того, система уравнений Гамильтона распадается на n независимых систем:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial p_i}.$$

Если кривые $H_i(q_i, p_i) = c_i$ на соответствующей плоскости $\mathbf{R}^2(p_i, q_i)$ все замкнуты, то в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ совместный уровень $I_{c_1 \dots c_n} = \{H_1 = c_1, \dots, H_n = c_n\}$ получается n -мерным тором. В самом деле, $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^2 \times \dots \times \mathbf{R}^2$ и в каждом сомножителе высекается $\mathbf{S}^1$; в результате

$$I_{c_1 \dots c_n} \simeq \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1 = \mathbf{T}^n.$$

4. Сложное разделение переменных:

$$H = \frac{\sum F_i(q_i, p_i)}{\sum f_i(q_i, p_i)}.$$

Тогда $G_i = F_i - H f_i$ — первые интегралы в инволюции.

Задача 52. Проверить это.

В сумме функции G_i дают тождественный нуль, так что среди них только не более $(n-1)$ независимых; вместе с H получается ровно n . В частности, в случае лиувиллевых систем

$$H = [\sum f_i(q_i)]^{-1} \left[\sum \left(\frac{p_i^2}{2} + V_i(q_i) \right) \right],$$

т. е. имеет место вариант сложного разделения переменных. Как и в случае полного разделения, в фазовом пространстве легко могут получаться n -мерные торы, если на плоскостях $\mathbf{R}^2(p_i, q_i)$ получаются «окружности» $\{G_i = F_i - h f_i = c_i\}$. На эту ситуацию еще предстоит посмотреть с более общей точки зрения.

Задача 53. Рассмотрим плоскую задачу Кеплера ($m=1$):

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r},$$

а) Каков смысл циклического интеграла $G = p_\varphi$?

б) Допускает ли гамильтониан H отделение переменных? Полное разделение переменных? Сложное разделение переменных?

Известно, что наряду с интегралами энергии и момента в задаче Кеплера есть векторный первый интеграл — вектор Лапласа $\Phi = \Phi_x \mathbf{e}_x + \Phi_y \mathbf{e}_y$ (см. § 3). Требуется

в) выразить Φ_x, Φ_y через $r, \varphi, p_r, p_\varphi$;

г) показать, что

$$(\Phi_x, G) = -\Phi_y, \quad (\Phi_y, G) = \Phi_x, \quad (\Phi_x, \Phi_y) = 2GH$$

(еще одна иллюстрация теоремы Пуассона и комментария к ней).

§ 17. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Симплектической единицей называется матрица размером $2n \times 2n$:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица $n \times n$. Легко проверить, что $I^2 = -E_{2n}$, откуда $I^{-1} = -I = I^*$.

В пространстве $\mathbb{R}^{2n}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n})$ введем *кососкалярное произведение* по формуле

$$\langle x, y \rangle = x \cdot I y, \quad (17.1)$$

где $\cdot$ — формальное (покомпонентное) скалярное произведение. В координатной записи

$$\langle x, y \rangle = \sum_i (-x_i y_{n+i} + y_i x_{n+i}) = (x_1, \dots, x_{2n}) I \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{2n} \end{pmatrix},$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_{2n}), \quad y = (y_1, \dots, y_{2n}),$$

Свойства кососкалярного произведения:

(α) кососимметричность: $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$;

(β) билинейность: $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle$;

(γ) невырожденность: $\langle x, y \rangle = 0 \forall x \Leftrightarrow y = 0$.

Лемма 0 (следствие невырожденности). Если $(f_1, \dots, f_{2n})$ — базис $\mathbb{R}^{2n}$, то матрица $\|\langle f_i, f_j \rangle\|$ имеет ненулевой определитель.

Доказательство. Пусть ее строки (или столбцы) линейно зависимы, т. е. $\sum_i \lambda_i \langle f_i, f_j \rangle = 0$, или $\left| \sum_i \lambda_i f_i, f_j \right| = 0$ в силу линейности кососкалярного произведения. Поскольку f_i составляют базис, по свойству (γ) имеем $\sum \lambda_i f_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ для всех i .

Определение. Базис $f_1, \dots, f_{2n}$ называется *симплектическим* (каноническим), если $\|\langle f_i, f_j \rangle\| = I$.

Такие базисы существуют; в частности, базис $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ — симплектический.

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Линейное отображение $z \mapsto \xi = Sz$ называется *каноническим* (симплектическим), если оно сохраняет кососкалярное произведение, т. е.

$$\langle x, y \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \langle Sx, Sy \rangle. \quad (17.2)$$

Матрица S называется в этом случае *симплектической*. Ясно, что она непременно невырождена.

Теорема. Матрица S является симплектической тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

(А) симплектический базис переходит в симплектический;

- (Б) $S^*IS=I$;
 (В) $SIS^*=I$;
 (Г) $S^{-1}=-IS^*I$;
 (Д) $S^*=-IS^{-1}I$.

Пусть

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D — матрицы n -го порядка. Должно быть

- (Е) $A^*B - B^*A = 0, C^*D - D^*C = 0, AD - B^*C = E$;
 (Ж) $AC^* - CA^* = 0, BD^* - DB^* = 0, AD^* - CB^* = E$;

3) $S^{-1} = \begin{pmatrix} D^* & -C^* \\ -B^* & A^* \end{pmatrix}.$

Доказательство. Выпишем тождество (2) подробно:

$$\setminus \xi, \eta \setminus = \xi \cdot I \eta = Sx \cdot ISy = x \cdot S^*ISy = x \cdot Iy = \setminus x, y \setminus.$$

Из последней строчки следует (Б). Умножая это равенство на S^{-1} справа и $I^{-1} = -I$ слева, получаем (Г), из которого умножением справа на S и слева на $I^{-1} = -I$ получается (В). Для доказательства (Е) вычислим

$$\begin{aligned} S^*IS &= \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ +E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B & -D \\ A & C \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B^*A - A^*B & -A^*D + B^*C \\ D^*A - C^*B & D^*C - C^*D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу (Б) получаем условия на матрицы A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A^*B - B^*A &= 0, \\ C^*D - D^*C &= 0, \\ A^*D - B^*C &= E, \\ C^*B - D^*A &= -E. \end{aligned}$$

Последние два условия равносильны (первые два условия означают, что матрицы A^*B и C^*D — симметрические).

Пример. Пусть $n=1$. Тогда симплектическим пространством будет плоскость $R^2(z_1z_2)$. Пусть каноническое отображение задается матрицей

$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Выполнение первых двух условий критерия (Е) очевидно: $ab - ba = cd - dc = 0$. Последнее условие: $ad - bc = 1$ означает, что $\det S = 1$. Этому удовлетворяют, в частности,

- а) собственные ортогональные матрицы (матрицы поворотов);
 б) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0,$$

которые задают гиперболические повороты:

$$\zeta_1 = \lambda z_1, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\lambda} z_2.$$

Очевидно, что $\zeta_1 \zeta_2 = z_1 z_2$, так что векторы-образы с изменением λ как будто скользят по гиперболе (при обычном повороте сохраняются окружности, при гиперболическом — гиперболы).

ЛИНЕЙНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. Пусть имеются уравнения Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Положим $z_i = p_i$, $z_{n+i} = q_i$; нашу систему можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} \\ \frac{dq_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

Слева у нас стоит вектор $\frac{dz}{dt}$, справа симплектическая единица умножается на вектор $\frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \right)$. Итак,

$$\frac{dz}{dt} = I \frac{\partial H}{\partial z} \quad (17.3)$$

другое представление системы Гамильтона. Она линейна тогда и только тогда, когда (с точностью до константы) H — квадратичная форма своих аргументов, т. е. $H = \frac{1}{2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{H} \mathbf{z}$, где $\mathbf{H}$ — симметрическая матрица. В таком случае система (3) примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = I \mathbf{H} \mathbf{z}. \quad (17.4)$$

Поскольку $I \mathbf{H}$ — постоянная матрица, общее решение здесь

$$\mathbf{z} = e^{I \mathbf{H} t} \mathbf{z}_0. \quad (17.5)$$

Матричный ряд

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

абсолютно сходится. Нетрудно показать, что

- 1) $(e^A)^* = e^{A^*}$;
- 2) $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$;
- 3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;
- 4) $(e^{A(t)}) = \dot{A}(t) e^{A(t)}$, если $\dot{A}A = A\dot{A}$.

Определение. Назовем *фазовым потоком* g_H^t группу сдвигов за время t вдоль решений системы (4):

$$z_0 \rightarrow g_H^t z_0 = z(z_0, t) = e^{Ht} z_0.$$

Задача 54. Пусть $n=1$ и $H = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + \beta q^2)$, $\alpha > 0$. Тогда

а) при $\beta > 0$ (эллиптический тип фазового потока)

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} \cos vt & -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin vt \\ +\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin vt & \cos vt \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\alpha\beta};$$

б) при $\beta = 0$ (промежуточный вырожденный случай)

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 0 \end{pmatrix};$$

в) при $\beta < 0$ (гиперболический тип)

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} vt & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{sh} vt \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \operatorname{sh} vt & \operatorname{ch} vt \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{-\alpha\beta}.$$

Доказать. Изобразить фазовый портрет во всех случаях.

Лемма 1. Матрица e^{Ht} — симплектическая, т. е. фазовый поток состоит из канонических (симплектических) отображений.

Докажем, что если H — симметрическая, то e^{Ht} — каноническая (обратное неверно, т. е. не каждая каноническая матрица так представима):

$$S^* = (e^{Ht})^* = e^{H^* t} = e^{-Ht} = \sum \frac{1}{n!} (-1)^n (HI)^n.$$

Но

$$(HI)^n = H I H I \dots H I = I^{-1} (I H I H \dots I H) I = I^{-1} (IH)^n I.$$

Следовательно,

$$\sum \frac{1}{n!} (-1)^n (HI)^n = I^{-1} \sum \frac{1}{n!} (-IH)^n I = I^{-1} e^{-IH} I.$$

Таким образом, $S^* = I^{-1} S^{-1} I$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть λ_i — собственные числа матрицы $I\mathbf{H}$, а $\mathbf{f}_i$ — ее собственные векторы (вообще говоря, комплексные). Тогда либо $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$, либо $\lambda_i + \lambda_j = 0$.

Доказательство исходит из симметричности матрицы $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{f}_j = \mathbf{H}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0.$$

Первое слагаемое

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{f}_j = -\mathbf{f}_i \cdot I^2 \mathbf{H}\mathbf{f}_j = -I \mathbf{H}\mathbf{f}_j, \quad \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \lambda_j \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i$$

и аналогично второе:

$$-I \mathbf{H}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \lambda_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j.$$

В итоге $(\lambda_i + \lambda_j) \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$.

Лемма 3 (о распределении собственных чисел). Если λ — собственное, то

(а) общий факт: и $\bar{\lambda}$ — собственное;

(б) специфический факт: $-\lambda$ — тоже собственное.

Второе следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(I\mathbf{H} - \lambda E) = \det(I\mathbf{H} - \lambda E)^* = \det(-I\mathbf{H} - \lambda E) = \\ &= \det[I(I\mathbf{H} + \lambda E)I] = (\det I)^2 \det(I\mathbf{H} + \lambda E) = \det(I\mathbf{H} + \lambda E). \end{aligned}$$

Таким образом, расположение ненулевых собственных чисел на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ характеризуется разбиением их на пары (в случае чисто мнимых и действительных) и четверки (рис. 70). Всюду ниже будем считать, что все собственные числа матрицы различны, следовательно, ни одно не равно нулю.

ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Пусть $\mathbf{z} = I\mathbf{H}\mathbf{z}$, и есть каноническое отображение $\xi = S\mathbf{z}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= S \frac{d\mathbf{z}}{dt} = S I \mathbf{H} \mathbf{z} = S I \mathbf{H} S^{-1} \xi = S I S^* (S^*)^{-1} \mathbf{H} S^{-1} \xi = \\ &= I (S^{-1})^* \mathbf{H} S^{-1} \xi = I \mathbf{H}' \xi \end{aligned}$$

(причем $\mathbf{H}' = (S^{-1})^* \mathbf{H} S^{-1}$ — симметрическая матрица): преобразованная система снова линейная каноническая. Ее гамильтониан

$$\begin{aligned} H'(\xi) &= \frac{1}{2} \xi \cdot \mathbf{H}' \xi = \frac{1}{2} \xi \cdot (S^{-1})^* \mathbf{H} S^{-1} \xi = \frac{1}{2} S^{-1} \xi \cdot \mathbf{H} S^{-1} \xi = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{H} \mathbf{z} = H(S^{-1} \xi). \end{aligned}$$

Канонические преобразования призваны упрощать системы.

Задача 55. Пусть $n=1$ и $H = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + 2\gamma pq + \beta q^2) \equiv 0$.

Показать, что существует симплектическое преобразование

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

такое, что $H' = \pm \frac{1}{2}(P^2 + \mu Q^2)$ (вспомним примеры симплектических матриц при $n=1$). Чему равно μ ? В каком смысле мож-

но сказать, что существуют два варианта эллиптического типа фазового потока и только один вариант гиперболического типа?

Теорема о полном разделении. Если собственные значения матрицы $I\mathbf{H}$ различные чисто мнимые или действительные числа, то существует каноническое преобразование $\xi = S\mathbf{z}$ такое, что

$$H' = \sum_{i=1}^n \pm \frac{1}{2} (P_i^2 + \mu_i Q_i^2),$$

т. е. переменные полностью разделяются. Здесь $\xi = (P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)$.

Доказательство проводится в три этапа.

1. Следствие леммы 2. Можно так занумеровать числа λ_i и выбрать векторы $\mathbf{f}_i$, чтобы выполнялось следующее:

- а) для $\alpha = 1, \dots, m$ — числа $\lambda_\alpha, \lambda_{n+\alpha} = -\lambda_\alpha$ — действительные, а для $\rho = m+1, \dots, n$ числа $\lambda_\rho, \lambda_{n+\rho} = \bar{\lambda}_\rho$ — чисто мнимые;
- б) симплектическим является базис:

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_i\} = \{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha, \tilde{\mathbf{f}}_\rho = \text{Re } \mathbf{f}_\rho, \tilde{\mathbf{f}}_{n+\alpha} = \mathbf{f}_{n+\alpha}, \tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho} = \text{Im } \mathbf{f}_\rho\} \quad (17.6)$$

(как известно,

$$\lambda_\rho \longleftrightarrow \mathbf{f}_\rho = \tilde{\mathbf{f}}_\rho + i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}, \lambda_{n+\rho} = \bar{\lambda}_\rho \longleftrightarrow \mathbf{f}_{n+\rho} = \tilde{\mathbf{f}}_\rho - i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho},$$

т. е. сопряженным собственным числам отвечают сопряженные собственные векторы). Положим $\lambda_\rho = -i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\rho} = i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\alpha} = \lambda'_\alpha$.

2. Предложение. Пусть S — отображение, переводящее $\mathbf{e}_i$ в $\tilde{\mathbf{f}}_i$. Тогда в новых переменных $\omega = (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n)$

$$\tilde{H} = \sum_{\alpha} \lambda'_\alpha r_\alpha s_\alpha + \sum_{\rho} \frac{1}{2} \lambda'_\rho (r_\rho^2 + s_\rho^2).$$

3. Замечание. От $\tilde{H}$ можно перейти к H' , указанному в формулировке теоремы. По каждой паре переменных надо действовать независимо. Если есть две переменные r, s , то

$$\tilde{H} = \lambda r s \rightarrow H'' = \frac{\lambda}{2} (\bar{r}^2 - \bar{s}^2) \rightarrow H' = \frac{1}{2} (P^2 + \mu Q^2), \mu < 0,$$

$$\tilde{H} = \frac{\lambda}{2} (r^2 + s^2) \rightarrow H' = \pm \frac{1}{2} (P^2 + \mu Q^2), \mu > 0,$$

при соответствующем линейном каноническом преобразовании (см. примеры линейных канонических отображений при $n=1$).

Доказательство следствия. Занумеруем λ_i так, чтобы

$$\lambda_\alpha = -\lambda_{n+\alpha}, \alpha = 1, \dots, m, \text{ и } \lambda_\rho = \bar{\lambda}_{n+\rho}, \rho = m+1, \dots, n,$$

где λ_α чисто действительны, λ_ρ чисто мнимы. Так как все λ_i различны, существует собственный базис $\mathbf{f}$. Перейдем к вещественному базису $\tilde{\mathbf{f}}$ по формуле (6) и сведем все векторы в пары вида $\pi_i = \{\tilde{\mathbf{f}}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{n+i}\}$.

А. Покажем, что векторы из разных пар π_i и π_j ($i \neq j$) попарно косоортогональны. Рассмотрим, например, случай $i=\alpha$, $j=\rho$. Так как λ_α вещественны, а λ_ρ мнимы, то

$$\lambda_\alpha + \lambda_\rho \neq 0, \lambda_\alpha + \lambda_{n+\rho} \neq 0, \lambda_{n+\alpha} + \lambda_\rho \neq 0, \lambda_{n+\alpha} + \lambda_{n+\rho} \neq 0.$$

Отсюда по лемме 3

$$\backslash \tilde{f}_{n+\alpha}, \tilde{f}_\rho \pm i \tilde{f}_{n+\rho} \backslash = \backslash \tilde{f}_\alpha, \tilde{f}_\rho \pm i \tilde{f}_{n+\rho} \backslash = 0,$$

или, отделяя действительные и мнимые части,

$$\backslash \tilde{f}_\alpha, \tilde{f}_\rho \backslash = \backslash \tilde{f}_\alpha, \tilde{f}_{n+\rho} \backslash = \backslash \tilde{f}_{n+\alpha}, \tilde{f}_\rho \backslash = \backslash \tilde{f}_{n+\alpha}, \tilde{f}_{n+\rho} \backslash = 0.$$

Упражнение. Остальные случаи разобрать самостоятельно.

Б. Итак, в репере $\{\tilde{f}_i\}$ все $\backslash \tilde{f}_i, \tilde{f}_k \backslash = 0$ за исключением $\backslash \tilde{f}_k, \tilde{f}_{n+k} \backslash = -\backslash \tilde{f}_{n+k}, \tilde{f}_k \backslash = c_k \neq 0$ (если бы хоть одно из $c_k=0$, то матрица попарных кососкалярных произведений векторов базиса была бы вырождена, что противоречит лемме 0).

Осталось сделать $c_k \equiv 1$. Во-первых, можно считать $c_i > 0$, поменяв, если надо, местами λ_k и λ_{n+k} (если $k=\alpha$, то поменяются местами $\tilde{f}_\alpha$ и $\tilde{f}_{n+\alpha}$, если $k=\rho$, то $\tilde{f}_k$ не изменит направление, $\tilde{f}_{n+\rho}$ изменит). Теперь, если $c_k \neq 1$, то возьмем вместо $\tilde{f}_k$ и $\tilde{f}_{n+k}$ векторы $\frac{1}{\sqrt{c_k}} \tilde{f}_k$ $\frac{1}{\sqrt{c_k}} \tilde{f}_{n+k}$.

Доказательство предложения. Пусть λ_k — собственные числа линейной системы $\dot{z} = Cz$ (каноничность пока не используется) и вектор z разложен по собственному реперу $z = \sum z_i \tilde{f}_i$, тогда

а) система приобретает вид $\dot{z}_k = \lambda_k z_k$;

б) если $\lambda_j = \bar{\lambda}_k$, то $z_j = \bar{z}_k$; если λ_k — действительное число, то и z_k — действительная координата.

Применим эти общие сведения к каноническим системам. Для пары собственных значений λ_α , $\lambda_{n+\alpha} = -\lambda_\alpha$ имеем

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha z_\alpha, \quad \frac{dz_{n+\alpha}}{dt} = \lambda_{n+\alpha} z_{n+\alpha},$$

или, обозначив $z_\alpha = r_\alpha$, $z_{n+\alpha} = s_\alpha$ и учитывая $\lambda_{n+\alpha} = -\lambda_\alpha$, приходим к

$$\frac{dr_\alpha}{dt} = -\lambda_{n+\alpha} r_\alpha = -\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (\lambda_{n+\alpha} r_\alpha s_\alpha),$$

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = \lambda_{n+\alpha} s_\alpha = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\lambda_{n+\alpha} r_\alpha s_\alpha).$$

Для пары собственных значений $\lambda_\rho = -i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\rho} = i\lambda'_\rho$ обозначим

$$z_\rho = \frac{1}{2}(r_\rho - is_\rho), \quad z_{n+\rho} = \frac{1}{2}(r_\rho + is_\rho),$$

тогда

$$\frac{dz_\rho}{dt} = \lambda_\rho z_\rho \iff \frac{d}{dt}(r_\rho - is_\rho) = -i\lambda'_\rho(r_\rho - is_\rho),$$

а после отделения действительной и мнимой частей

$$\frac{dr_p}{dt} = -\lambda'_p s_p = -\frac{\partial}{\partial s_p} \left(\frac{\lambda'_p}{2} (r_p^2 + s_p^2) \right),$$

$$\frac{ds_p}{dt} = \lambda'_p r_p = \frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{\lambda'_p}{2} (r_p^2 + s_p^2) \right).$$

Итак, в переменных r_k, s_k уравнения Гамильтона разделяются на независимые системы. Суммарный гамильтониан и есть искомым.

Задача 56. Доказать, что каноническая система $\dot{z} = \mathbf{H}z$

а) имеет вполне-линейный интеграл $F = \mathbf{z} \cdot \mathbf{I} \mathbf{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{H} \mathbf{I} = 0$, так что существует $\lambda = 0$;

б) имеет вполне-квадратичный интеграл $G = \frac{1}{2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{G} \mathbf{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G} \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{G}$ (т. е. $\mathbf{G} \mathbf{H} = -(\mathbf{G} \mathbf{H})^*$);

в) фазовые потоки систем $\dot{z} = \mathbf{H}z, \dot{z}' = \mathbf{I} \mathbf{G} z$ коммутируют, т. е. (рис. 71) $\mathbf{z}_H(t, \mathbf{z}_G(s, \mathbf{z}_0)) = \mathbf{z}_G(s, \mathbf{z}_H(t, \mathbf{z}_0))$;

г) при полном разделении переменных квадратичный интеграл приводится к виду

$$G = \sum \frac{\delta_i}{2} (P_i^2 + \mu Q_i^2).$$

§ 18. КАНОНИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Напомним некоторые сведения из курса дифференциальной геометрии. Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое многообразие с локальными координатами $z_1, \dots, z_k$ (его можно представить себе в виде поверхности в пространстве). Если в § 3 мы записывали касательный вектор в виде $\mathbf{v} = \sum v_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_i}$, то теперь будем писать более условно:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (18.1)$$

Смысл такой записи в том, что задание отдельного вектора или векторного поля равносильно заданию дифференцирования гладких функций $f(z_1, \dots, z_k)$ вдоль этого вектора или поля. А именно,

$$\mathbf{v}(f) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (18.2)$$

есть производная функции f вдоль (1). Каждому векторному полю $\mathbf{v}(z)$ отвечает его фазовый поток $g_{\mathbf{v}}^t$: по определению $g_{\mathbf{v}}^t(z)$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = v_i(z_1, \dots, z_k)$$

с начальным условием $g_{\mathbf{v}}^0(z) = z$. Фазовый поток обладает груп-

повым свойством:

$$g^{t_2}(g^{t_1}(z)) = g^{t_1+t_2}(z). \quad (18.3)$$

Отсюда еще один термин: g_v^t есть однопараметрическая группа, порожденная полем v .

О локальности. Следует иметь в виду, что за некоторое время t точка $g_v^t(z)$ может выйти за пределы той области на $\mathfrak{M}$, в которой определены координаты $z_1, \dots, z_k$. Эта тонкость несущественна в следующем смысле: на деле фазовый поток как отображение $\mathfrak{M}$ в себе не зависит от выбора локальных координат (на доказательстве останавливаться не будем). Еще одна тонкость состоит в том, что векторное поле v может быть стеснено: не все решения системы определены при $-\infty < t < \infty$ даже после неограниченного продолжения их в других системах координат. Поэтому более строго было бы говорить о локальном фазовом потоке: для каждого z точка $g_v^t(z)$ определена лишь для достаточно малых t . (Соответственно о выполнении группового свойства имеет смысл говорить лишь тогда, когда определены правая и левая части равенства (3).) Для большинства дальнейших рассуждений этого вполне достаточно. В ряде случаев нестесненность векторных полей существенна — тогда мы будем ее оговаривать. Когда многообразие $\mathfrak{M}$ компактно, то на нем все векторные поля не стеснены.

Если u и v — два векторных поля, то их скобка Ли

$$[u, v](f) = v(u(f)) - u(v(f))$$

есть новое векторное поле. Свойства скобки Ли:

- 1) кососимметричность: $[u, v] = -[v, u]$;
- 2) линейность над $\mathbb{R}$;
- 3) тождество Якоби:

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0.$$

Таким образом, гладкие векторные поля образуют алгебру Ли.

Если $[u, v] = 0$, это означает, что фазовые потоки этих полей коммутируют: $g_v^t(g_u^s(x)) = g_u^s(g_v^t(x))$ (рис. 71).

Основное свойство коммутирующих полей. Если

$$[u_i, u_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, l \leq k,$$

то существуют локальные координаты $\xi_1, \dots, \xi_k$ такие, что

$$u_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, l \leq k$$

(тогда поток поля u_i есть сдвиг по координате ξ_i).

Дифференциальными формами называются кососимметрические тензоры ранга m (полилинейные функции m векторных аргументов):

$$\theta = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \theta_{i_1 \dots i_m} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_m}.$$

Нам потребуются лишь 1- и 2-формы (и один раз — 3-форма, тождественно равная нулю):

а) при $m=1$ форма называется также ковекторным полем и записывается в виде

$$\omega = \sum \omega^i dz_i; \quad (18.4)$$

если $u = \sum u_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ — векторное поле, то

$$\omega(u) = \sum \omega^i u_i, \quad (18.5)$$

в частности,

$$\omega = df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \Rightarrow df(u) = u(f); \quad (18.6)$$

б) при $m=2$ форма записывается в виде

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} dz_i \wedge dz_j; \quad (18.7)$$

для базисных 2-форм имеем

$$(dz_i \wedge dz_j)(u, v) = u_i v_j - v_i u_j \quad (18.8)$$

(впрочем, это зависит уже от соглашения: авторы многих руководств пишут справа множитель $1/2$, а в выражении (7) снимают неравенство $i < j$ и добавляют условие $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$).

Операция внешнего дифференцирования:

$$d\theta = \sum_{i_1 < \dots < i_{m+1}} \left[\sum_j (-1)^{j+1} \frac{\partial \theta_{i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{m+1}}}{\partial z_j} \right] dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{m+1}},$$

в частности, при $m=1$

$$d\omega = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial z_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial z_j} \right) dz_i \wedge dz_j.$$

Формы можно интегрировать по ориентированным m -мерным поверхностям (в частности, 1-формы по кривым).

Формула Стокса. Если $\Theta = d\Theta'$, то

$$\int_{\sigma^m} d\Theta' = \int_{\partial \sigma^m} \Theta',$$

где $\partial \sigma^m$ — $(m-1)$ -мерная ориентированная граница поверхности σ^m . В частности,

$$\int_{AB} df = f(B) - f(A),$$

$$\int_{\sigma^2} \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial z_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial z_j} \right) dz_i \wedge dz_j = \oint_{\Gamma = \partial \sigma^2} \sum_i \omega^i dz_i.$$

Лемма Пуанкаре. Если форма Θ замкнута: $d\Theta=0$, то она локально (в некоторой окрестности каждой точки) точна: $\Theta = d\Theta'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ. *Каноническим*, или *симплектическим многообразием* называется пара (M^{2n}, Ω) , где M^{2n} — $2n$ -мерное гладкое многообразие, а $\Omega(a, b)$ — заданная на всем M^{2n} , невырожденная —

(K1) $\Omega(a, b) = 0$ для всех a , только если $b = 0$,
замкнутая —

(K2) $d\Omega \equiv 0$,
2-форма, называемая *канонической структурой*.

Упражнение. Пусть в локальных координатах $z_1, \dots, z_{2n}$

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} dz_i \wedge dz_j.$$

Представим эту форму в виде

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \Omega_{ij} dz_i \wedge dz_j, \quad \Omega_{ji} = -\Omega_{ij}. \quad (18.10)$$

Доказать, что (K1), (K2) эквивалентны требованиям

$$\det \|\Omega_{ij}\| \neq 0, \quad (18.11a)$$

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial z_k} + \frac{\partial \Omega_{ki}}{\partial z_j} + \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial z_i} \equiv 0. \quad (18.11b)$$

ГАМИЛЬТОНОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Лемма. Для любой гладкой функции $H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ существует векторное поле $\tilde{H}$ такое, что для всякого касательного вектора b

$$dH(b) = \Omega(\tilde{H}, b) \quad (18.12)$$

(оно называется *гамильтоновым, порожденным функцией H*).

Доказательство. Каноническая структура на M^{2n} устанавливает изоморфизм между пространствами векторных полей и дифференциальных форм на M^{2n} . Векторному полю a ставится в соответствие 1-форма Ω^a , определяемая соотношением

$$\Omega^a(b) = \Omega(a, b).$$

Это линейное соответствие взаимно-однозначно: если

$$(\Omega^{a_1} - \Omega^{a_2})(b) = \Omega(a_1 - a_2, b) = 0, \quad \text{то } a_1 = a_2$$

в силу невырожденности. Поскольку пространства векторов и ко-векторов в каждой точке имеют равные размерности, имеется обратное отображение; в частности, ковекторному полю dH соответствует искомое векторное поле $\tilde{H}$ (короче, $\Omega^{\tilde{H}} = dH$).

В локальных координатах положим

$$a = \sum_{i=1}^{2n} A_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad b = \sum_{i=1}^{2n} B_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \tilde{H} = \sum_{i=1}^{2n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i};$$

тогда в силу (8) и (10) последовательно имеем

$$\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j} \Omega_{ij} A_i B_j, \quad \Omega^a = \sum_j \left(\sum_i \Omega_{ij} A_i \right) dz_j,$$

$$\Omega^{\tilde{H}} = \sum_j \left(\sum_i \Omega_{ij} Z_i \right) dz_j = \sum_j \frac{\partial H}{\partial z_j} dz_j = dH,$$

что приводит к матричному выражению

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{2n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}, \quad (18.13)$$

где $\mathbf{J} = -\|\Omega_{ij}\|^{-1}$. Знак минус появился оттого, что в выражении для Ω^a суммирование во внутренней скобке идет по первому индексу: это соответствует умножению вектора-столбца A на матрицу $\|\Omega_{ij}\|^* = -\|\Omega_{ij}\|$.

СКОБКА ПУАССОНА. Сейчас мы даем определение заново, и лишь позднее придем к прочтению этого термина в духе § 16. Обозначение будет тем же самым. Положим

$$(F, G) = \Omega(\tilde{F}, \tilde{G}). \quad (18.14)$$

В силу (6) и (12)

$$(F, G) = \tilde{G}(F), \quad (18.15)$$

так что в локальных координатах

$$(F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{2n}} \right) \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}. \quad (18.16)$$

Отсюда — матрица базисных скобок Пуассона:

$$\mathbf{J} = \|(z_i, z_j)\|. \quad (18.17)$$

Очевидно, что скобка Пуассона здесь, как и в § 16, кососимметрична и линейна по каждому функциональному аргументу.

Теорема. (а) *Справедливо тождество Пуассона*

$$(F, (G, H)) + (G, (H, F)) + (H, (F, G)) = 0. \quad (18.18)$$

(б) *Скобка Ли векторных полей $\tilde{F}, \tilde{G}$ порождается скобкой Пуассона функций F, G :*

$$[\tilde{F}, \tilde{G}] = \overleftarrow{(F, G)}. \quad (18.19)$$

Доказательство. Пока еще не полученное тождество (18) перепишем:

$$\left. \begin{aligned} ((H, F), G) - ((H, G), F) &= (H, (F, G)), \\ \tilde{G}(\tilde{F}(H)) - \tilde{F}(\tilde{G}(H)) &= (H, (F, G)), \\ [\tilde{F}, \tilde{G}](H) &= (\tilde{F}, \tilde{G})(H). \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

В левую часть (18) входят слагаемые четырех сортов:

$$J \frac{\partial J}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad JJ \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ JJ \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z}, \quad JJ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z}$$

(индексы для краткости опущены). Все слагаемые последнего сорта (со вторыми производными H) поначалу стояли в левой части (20). После преобразований оказалось, что слева стоит производная функции H вдоль некоторого векторного поля, которая зависит только от первых производных. Следовательно, слагаемые последнего сорта взаимно уничтожаются. То же касается и слагаемых со вторыми производными F и G . Приходим к тому, что в левой части (18) стоят слагаемые только первого сорта. Более конкретно:

$$\begin{aligned} &((F, G), H) + ((H, F), G) + ((G, H), F) = \\ &= \sum_{a, b, c=1}^{2n} [((z_a, z_b), z_c) + ((z_c, z_a), z_b) + ((z_b, z_c), z_a)] \frac{\partial F}{\partial z_a} \frac{\partial G}{\partial z_b} \frac{\partial H}{\partial z_c}, \end{aligned}$$

так как в силу (16) и (17)

$$(F, G) = \sum_{a, b} (z_a, z_b) \frac{\partial F}{\partial z_a} \frac{\partial G}{\partial z_b}.$$

Выражение в квадратных скобках равно

$$\sum_m \left(\frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m} J_{cm} + \frac{\partial J_{ca}}{\partial z_m} J_{mb} + \frac{\partial J_{bc}}{\partial z_m} J_{ma} \right) \equiv 0.$$

Чтобы убедиться в последнем, продифференцируем тождество $\sum_l J_{il} \Omega_{lj} = \delta_{ij}$ и получим

$$\begin{aligned} \sum_l \Omega_{jl} \frac{\partial J_{li}}{\partial z_k} + \sum_l J_{il} \frac{\partial \Omega_{lj}}{\partial z_k} &= 0, \\ \sum_{a, b} \Omega_{ai} \Omega_{jb} \frac{\partial J_{bt}}{\partial z_k} + \frac{\partial \Omega_{aj}}{\partial z_k} &= 0, \\ \sum_{a, b, m} \Omega_{ia} \Omega_{jb} \delta_{km} \frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m} + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial z_k} &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{a, b, c} \Omega_{ia} \Omega_{jb} \Omega_{kc} \left(\sum_m J_{cm} \frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m} \right) + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial z_k} = 0.$$

Осталось сослаться на (11б) и (11а).

Установив тождество (18), видим теперь, что третья строчка в (20) доказывает (19).

Следствие. Если $(F, G) \equiv \text{const}$, то поля $\vec{F}, \vec{G}$ коммутируют.

Примечания к теореме: 1) как и в § 16, гладкие функции образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона; отображение $\chi(F) = \vec{F}$ есть гомоморфизм ее в алгебру векторных полей; 2) если $J = \text{const}$, то доказательство (18) сводится к рассуждению о вторых производных. Это ситуация § 16.

ФУНКЦИИ В ИНВОЛЮЦИИ. Как и в § 16, это функции, скобка Пуассона которых тождественно равна нулю. Если $(F, G) \equiv 0$, то мы снова можем констатировать, что функция F есть первый интеграл поля $\vec{G}$ (и наоборот) в силу (15).

Теорема о фазовых торах. Если есть n независимых функций F_i , попарно находящихся в инволюции, то всякая неособая связная компактная компонента L_c их совместного уровня

$$\{F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n\}$$

диффеоморфна n -мерному тору T^n .

Здесь «неособая» значит, что

$$\text{rang} \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = n \quad (18.21)$$

в каждой точке этой компоненты, так что L_c есть подмногообразие в M^{2n} размерности $2n - n = n$. Это ситуация «общего положения». Идейную нагрузку несет лишь условие компактности. В некотором смысле можно сказать, что сформулированная теорема описывает «достаточно типичный» феномен.

Доказательство. Условие $(F_i, \vec{F}_j) \equiv 0$ имеет два последствия: во-первых, $[\vec{F}_i, \vec{F}_j] \equiv 0$, так что все векторные поля $\vec{F}_i$ коммутируют; во-вторых, $\vec{F}_i(F_j) \equiv 0$, так что все они касаются L_c . Таким образом, на компактном n -мерном многообразии L_c есть n попарно коммутирующих векторных полей $\vec{F}_i$, которые к тому же линейно независимы в каждой точке в силу (21). Отсюда вытекает, что L_c диффеоморфен n -мерному тору T^n . Дальнейшие рассуждения, в сущности, лежат уже вне гамильтонова формализма и составляют доказательство только что высказанного утверждения.

1. Пусть $z_0 \in L_c$; положим

$$g^s(z_0) = g_{F_n}^{s_n} \dots g_{F_1}^{s_1}(z_0).$$

Поскольку потоки $g_{F_i}^{s_i}$ коммутируют, имеем групповое свойство:

$$g^{s+s'} = g^s \circ g^{s'}.$$

2. Отображение

$$h(s) = g^s(z_0), \quad h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{L}_c,$$

является локальным диффеоморфизмом. В силу группового свойства локальную взаимную однозначность достаточно доказать в окрестности $s=0$, а это очевидно в силу основного свойства коммутирующих полей: собственно, $s = (s_1, \dots, s_n) = h^{-1}(z)$ суть те самые координаты, в которых $\tilde{F}_i = \frac{\partial}{\partial s_i}$. Наконец, множество

$h[\mathbf{R}^n]$ одновременно замкнуто и открыто, так что совпадает с $\mathbf{L}_c$.

3. В целом отображение h не взаимно-однозначно. Мерой неоднозначности является множество $G = \{s : g^s(z_0) = z_0\}$, которое, очевидно, есть некоторая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}_n$. Иными словами,

$$s, s' \in G \Rightarrow s + s' \in G. \quad (18.22)$$

4. В силу сказанного в п. 2 множество G дискретно. Это значит, что всякая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ содержит лишь конечное число элементов G . Отсюда и из (22) вытекает, что G счетно.

5. Существуют векторы

$$\xi_1, \dots, \xi_k \in G, \quad k \leq n,$$

такие, что

$$G = \{m_1 \xi_1 + \dots + m_k \xi_k, \quad m_i \in \mathbf{Z}\}.$$

С точки зрения теории групп G изоморфна прямому произведению k экземпляров группы целых чисел $\mathbf{Z}$. Отложим обоснование этого утверждения, чтобы поскорее получить тор.

6. Дополним множество $\xi_1, \dots, \xi_k$ до базиса $\xi_1, \dots, \xi_n$, положим $\xi_\alpha = \sum \xi_{\alpha i} e_i$ и введем на $\mathbf{L}_c$ векторные поля

$$X_\alpha = \sum_i \frac{1}{2\pi} \xi_{\alpha i} \tilde{F}_i.$$

Эти поля, очевидно, коммутируют и линейно независимы. При $\alpha \leq k$ их фазовые потоки $g_{X_\alpha}^{\varphi_\alpha}$ обладают свойством периодичности:

$$g_{X_\alpha}^{2\pi} = g^0_{X_\alpha}.$$

Из построения 2—3 видно, что точки $\mathbf{L}_c$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками фактор-группы $\mathbf{R}^n/G$, т. е. множества

$$\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-k} = \{\varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_k \bmod 2\pi, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n\}.$$

Это соответствие является, очевидно, гладким (поскольку оно линейно в локальных координатах s_i на L_c). Множество $T^k \times R^{n-k}$ компактно только при $k=n$, что и требовалось.

7. Теперь докажем утверждение п. 5. В этом пункте будут использованы два стандартных обозначения: $[\gamma]$ есть целая часть, $\{\gamma\}$ — дробная часть числа γ . Пусть k — максимальное число линейно независимых элементов G ; не уменьшая общности, можно считать, что эти элементы суть $e_1, \dots, e_k$. Это позволяет вести рассмотрение просто в k -мерном пространстве; теперь $G \subset R^k$. Если $g = (g_1, \dots, g_k) \in G$, то $(\{g_1\}, \dots, \{g_k\}) \in G$ и лежит в единичном кубе. Но в силу дискретности G в нем лежат лишь конечное число элементов: поэтому существуют целые $l \neq m$ такие, что

$$\{lg_i\} = \{mg_i\},$$

или $(l-m)g_i = [lg_i] - [mg_i]$. Отсюда следует, что g_i — рациональные числа. Более того, они имеют общий знаменатель N в силу дискретности. Объем параллелепипеда, построенного на любых k линейно независимых векторах $\xi_1, \dots, \xi_k$ из группы, не меньше $1/N^k$. Поэтому существуют такие наборы векторов, у которых этот объем минимален. Это и будут искомые: если элемент $g = \sum \gamma_i \xi_i$, $0 \leq \gamma_i < 1$, то, например,

$$\text{vol}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, g) = \gamma_k \text{vol}(\xi_1, \dots, \xi_k),$$

откуда $\gamma_k = 0$ или 1.

Доказательство теоремы закончено. Добавим, что можно отказаться от условия компактности L_c и получить не тор, а цилиндр $T^k \times R^{n-k}$. Но для этого надо потребовать нестесненность полей $\tilde{F}_i$ на L_c .

§ 19. КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Локальные координаты

$$(z_1, \dots, z_{2n}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

называются *каноническими*, если

$$\Omega = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (19.1)$$

Ненулевыми элементами матрицы коэффициентов Ω являются $\Omega_{i,n+i} = -1$, $\Omega_{n+i,i} = 1$, так что

$$\|\Omega_{ij}\| = I, \quad J = -I^{-1} = I, \quad (19.2)$$

где I — симплектическая единица из § 17. Далее,

1) в каждом касательном пространстве имеем симплектическую структуру, причем векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}$$

в каждой точке образуют симплектический базис;

2) полю $\vec{H}$ соответствует система дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{2n}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} = I \frac{\partial H}{\partial z},$$

так что гамильтоновы векторные поля — это инвариантный объект, замещающий уравнения Гамильтона;

3) скобка Пуассона принимает обычный вид:

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot I \frac{\partial G}{\partial z} = \sum \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).$$

То, что замкнутая форма Ω локально точна в канонических координатах видно непосредственно. В самом деле,

$$\Omega = -d\left(\sum_i p_i dq_i\right). \quad (19.3)$$

Форма $\omega = \sum p_i dq_i$ понадобится нам в следующем параграфе. Заметим, не вникая в подробности, что в случае классических натуральных механических систем она корректно определена глобально.

ПЛЮС ИЛИ МИНУС? В литературе по каноническому формализму полностью отсутствует единообразие выбора знаков в определениях основных объектов: скобки Пуассона, симплектической единицы, канонической 2-формы и т. д.

Дело в том, что по ряду причин следовало бы изменить знак функции Гамильтона. Поскольку это невозможно, каждому пишущему о гамильтоновом формализме приходится в одиночку бороться с появляющимися то там то здесь минусами.

В этих лекциях принят такой подход: импульсы важнее координат (реальный гамильтониан обязательно зависит от импульсов, но может не зависеть от координат), следовательно, импульсы обозначаются предшествующей буквой алфавита, пишутся первыми, рисуются по вертикали; время пишется последним, так как в реальных гамильтонианах появляется относительно редко. Итак,

$$H = H(p, q, t).$$

Уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \iff \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

причем первые строчки суть преобразованные законы Ньютона ($H=T+V$, так что $\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} + \dots$). Видим, что

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Скобка Пуассона имеет вид, принятый в большинстве учебников:

$$(F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q} \right) \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{\partial G}{\partial q} \end{pmatrix} = \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right),$$

причем слагаемые со знаком минус поставлены первыми для того, чтобы p_i писать раньше q_i и одновременно F раньше G . Аналогично кососкалярное произведение и каноническая структура даются матричной формулой

$$\Omega(a, b) = (A_1, \dots, A_{2n}) \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{2n} \end{pmatrix},$$

где базисные векторы, по которым раскладываются a и b , стоят в принятом нами порядке: $\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}$. Отсюда

$$\Omega = - \sum_i dp_i \wedge dq_i,$$

причем знак минус опять поставлен для того, чтобы импульсы написать первыми. Отметим случаи «не тех знаков»:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(F) &= (F, H), \\ (p_i, q_i) &= -1. \end{aligned}$$

Наконец, мы имеем

$$[\tilde{F}, \tilde{G}] = \overleftarrow{(F, G)}$$

за счет того, что скобка Ли

$$[X, Y] = YX - XY$$

(в большинстве учебников знак другой).

Теперь нам надо увериться в том, что канонические координаты существуют всегда. Мы сделаем это в два этапа.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ПОПОЛНЕНИИ. Пусть имеется n независимых функций в инволюции:

$$(\Phi_i, \Phi_i) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19.4)$$

Тогда существуют еще n функций $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ таких, что набор $(\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$ является канонической системой координат (в частности, функции Ψ_i также попарно в инволюции).

Доказательство. Поскольку $[\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j] = (\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) \equiv 0$, в силу основного свойства коммутирующих полей существуют такие координаты $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$, что $\vec{\Phi}_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Отсюда

$$(\xi_i, \Phi_j) = \vec{\Phi}_j(\xi_i) = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}. \quad (19.5)$$

Лемма о невырожденности. Пусть $2n$ функций $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$ имеют невырожденную матрицу попарных скобок Пуассона:

$$((\zeta; \zeta)) = \|(\zeta_i, \zeta_j)\|.$$

Тогда невырождена матрица Якоби этих функций

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left\| \frac{\partial \zeta_j}{\partial z_i} \right\|,$$

и их можно принять за координаты. В самом деле, из (18.16)

$$((\zeta, \zeta)) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^* J \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \det J \neq 0.$$

В нашем частном случае в силу (4) и (5) невырождена матрица

$$((\Phi, \xi; \Phi, \xi)) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & \Lambda \end{array} \right\|, \Lambda = ?. \quad (19.6)$$

Дальнейшее рассмотрение поведем в координатах $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \xi_1, \dots, \xi_n$. Уточним структуру матрицы Λ в (6). Заметим, что

$$(\xi_i, \xi_j) = \lambda_{ij}(\Phi),$$

так как в силу тождества Пуассона и (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \xi_k} ((\xi_i, \xi_j), \Phi_k) &= -((\Phi_k, \xi_i), \xi_j) + ((\Phi_k, \xi_j), \xi_i) = \\ &= (\delta_{ki}, \xi_j) - (\delta_{kj}, \xi_i) \equiv 0. \end{aligned}$$

В координатах Φ, ξ матрица J равна (6). Поэтому

$$\|\Omega_{ij}\| = -J^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} -\Lambda & -E \\ E & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\Omega = - \sum_i d\Phi_i \wedge d\xi_i - \sum_{i < j} \lambda_{ij}(\Phi) d\Phi_i \wedge d\Phi_j.$$

Первое слагаемое само по себе есть замкнутая форма (ср. с (3)). Следовательно, замкнутой формой является и второе слагаемое:

$$\sum_{i < j} \lambda_{ij} d\Phi_i \wedge d\Phi_j = d \left(\sum_i f_i(\Phi) d\Phi_i \right).$$

Форма Ω приводится к виду

$$\Omega = d \left(\sum_i \xi_i d\Phi_i \right) - d \left(\sum_i f_i d\Phi_i \right) = d \left(\sum_i (\xi_i - f_i(\Phi)) d\Phi_i \right).$$

Осталось положить

$$\Psi_i = \xi_i - f_i(\Phi), \quad (19.7)$$

и мы получим искомые канонические координаты.

Примечание на будущее. Если в выражении функции $\Phi(\Phi, \xi)$ мы сделаем замену (7), то, очевидно, $\frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}$. Отсюда

$$\bar{\Phi}_i = \frac{\partial}{\partial \Psi_i} \quad (19.8)$$

в координатах Φ, Ψ .

ТЕОРЕМА ДАРБУ. В окрестности каждой точки канонического многообразия существуют канонические координаты.

Доказательство. Нам достаточно убедиться в локальном существовании n функций в инволюции. Но справедливо даже более сильное индуктивное утверждение:

если имеется $k < n$ независимых функций в инволюции $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, то существует независимая от них Φ_{k+1} такая, что $(\Phi_i, \Phi_{k+1}) \equiv 0$ (ясно, что одну функцию в инволюции мы всегда можем предъявить, поскольку $(\Phi, \Phi) \equiv 0$). Действительно, в некоторых координатах $\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_{2n-k}$ имеем, как и выше, $\bar{\Phi}_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. При этом

$$\Phi_i = \Phi_i(\eta_1, \dots, \eta_{2n-k}),$$

в силу того что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_j} = \bar{\Phi}_j(\Phi_i) = (\Phi_i, \Phi_j) \equiv 0.$$

Поскольку $k < 2n - k$, существует функция $\Phi_{k+1}(\eta)$, независимая с $\Phi_1, \dots, \Phi_k$. Тогда

$$(\Phi_{k+1}, \Phi_i) = \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \xi_i} \equiv 0,$$

что и требовалось.

ЛЕММА КАРАТЕОДОРИ. Рассмотрим замену переменных

$$P_k = q_k, \quad Q_k = -p_k, \quad k = j_1, \dots, j_m, \quad (19.9)$$

$$P_k = p_k, \quad Q_k = q_k, \quad k \neq j_1, \dots, j_m.$$

Ясно, что переменные P, Q — тоже канонические. Замена называется канонической перестановкой по индексам $j_1, \dots, j_m$.

Если есть n функций в инволюции $F_1, \dots, F_n$, независимых в точке z , то в ее окрестности существует такая каноническая перестановка, что в новых переменных

$$\det \frac{\partial F}{\partial P} = \det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial P_j} \right\| \neq 0. \quad (19.10)$$

Доказательство. Матрица Якоби в точке z

$$\frac{\partial F}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & & \frac{\partial F_n}{\partial q_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_n} & & \frac{\partial F_n}{\partial q_n} \end{vmatrix} \quad (19.11)$$

имеет ранг n . Следовательно, у нее есть невырожденные миноры порядка n (хотя бы один) вида

$$\frac{\partial F}{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, q_{j_1}, \dots, q_{j_m})}, \quad l + m = n.$$

Существо леммы в том, что можно подобрать минор так, чтобы

$$i_\alpha \neq j_\beta.$$

Вообще, невырожденный минор любой матрицы M можно искать методом окаймления: выстраивается цепочка невырожденных миноров

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k \subset \dots \subset M_n,$$

причем в качестве M_1 можно взять любой ненулевой элемент матрицы M . В нашем случае мы знаем, что ранг матрицы (11) максимален, так что ненулевой элемент имеется в первом столбце. Далее, минор M_2 можно выбрать из первых двух столбцов; M_3 — из первых трех и т. д. Будем действовать методом окаймления, но с дополнительным условием: если к минору M_k присоединяется часть строки $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ или $\frac{\partial F}{\partial q_j}$ (и, разумеется, часть $(k+1)$ -го столбца), то дополнительно будем вычеркивать всю строку $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ или $\frac{\partial F}{\partial p_j}$ соответственно (в этом и состоит эффективное наращивание непересекающихся множеств $\{i_\alpha\}$ и $\{j_\beta\}$).

Допустим, что таким методом мы не сможем получить ненулевого минора порядка n . С точностью до канонической перестановки это значит, что

$$\det \frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(p_1, \dots, p_k)} \neq 0 \quad (19.12)$$

и

$$\text{rang} \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n)} = k < n. \quad (19.13)$$

Зафиксируем произвольно $q_1, \dots, q_k$. Утверждения (12), (13) означают, что сужения функций F_i на подмногообразия $q_1, \dots, q_k = \text{const}$ зависимы, так что

$$F_{k+i} = \varphi_i(F_1, \dots, F_k, q_1, \dots, q_k),$$

где φ_i — некоторые гладкие функции. Вычислим теперь скобки Пуассона:

$$(F_{k+i}, F_\alpha) = \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial F_\mu}(F_\mu, F_\alpha) + \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\mu}(q_\mu, F_\alpha) = \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\mu} \equiv 0.$$

В силу (12) отсюда следует, что $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\mu} \equiv 0$, так что

$$F_{k+i} = \varphi_i(F_1, \dots, F_k).$$

Это значит, что функции $F_1, \dots, F_n$ зависимы. Противоречие.

§ 20. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ЭФФЕКТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Инвариантная точка зрения на гладкое многообразие состоит в том, что как множество точек оно существует независимо от тех систем координат (карт), которые на нем могут быть заданы. Допустим, что в некоторой области $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ система координат имеется; тогда каждая точка $P \in \mathcal{U}$ становится обладательницей своего собственного набора чисел; с помощью алгольного символа это можно записать в виде $P := (z_1, \dots, z_k)$. Если угодно, системе координат можно представлять себе как прозрачную пленку с сеткой линий, накладываемую на поверхность; преимущественно такого взгляда мы будем придерживаться.

Термин «преобразование» двусмыслен. Он применяется в обстоятельствах двух типов:

1. «Одна карта и две точки»: имеется взаимно-однозначное отображение φ многообразия $\mathcal{M}$ в себя, и мы воспользовались системой координат с областью определения $\mathcal{U}$. Пусть область $\mathcal{D}$ и множество $\varphi[\mathcal{D}]$ лежат в $\mathcal{U}$, так что точки

$$P := (z_1, \dots, z_k) \in \mathcal{U},$$

$$P' = \varphi(P) := (z'_1, \dots, z'_k) \in \mathcal{U}.$$

Тогда в пределах $\mathcal{D}$ существуют гладкие обратимые зависимости

$$z'_i = \varphi_i(z_1, \dots, z_k). \quad (\text{A})$$

Про них говорят, что они локально задают отображение.

2. «Одна точка и две карты»: рассматриваются две системы координат с областями определения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$; следовательно,

$$P := (z_1, \dots, z_k), P := (\xi_1, \dots, \xi_k)$$

в области $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, и в ней существуют гладкие обратимые зависи-

$$\xi_i = \psi_i(z_1, \dots, z_k). \quad (\text{Б})$$

Про них говорят, что имеется замена переменных.

Эти два прочтения термина «преобразование» взаимозаменяемы: в самом деле, формулы (А), задающие преобразование, можно использовать для задания новых координат и, наоборот, правые части формул (Б) можно применить для задания некоторого отображения (тривиальные уточнения формулировок опустим). Тем не менее полезно всякий раз ясно представить себе, что именно имеется в виду.

КАНОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Пусть есть каноническое многообразие (M^{2n}, Ω) и его отображение в себя: $\varphi: M \rightarrow M$. Можно определить обратный образ $\varphi^*\Omega$ формы Ω . В терминах интегрирования

$$\int_{\sigma^2} \varphi^* \Phi = \int_{\varphi(\sigma^2)} \Phi$$

для каждой двумерной ориентированной поверхности $\sigma^2 \subset M^{2n}$. Вычисляется $\varphi^*\Omega$ так (в канонических координатах):

$$\Omega = -\sum dp_i \wedge dq_i, \quad (20.1)$$

$$\varphi^*\Omega = -\sum dp'_i \wedge dq'_i,$$

где $p'_i = p'_i(p, q)$, $q'_i = q'_i(p, q)$ — формулы, локально задающие преобразование. В (1) надо выписать все полные дифференциалы и привести подобные члены.

Определение. Отображение φ называется *каноническим*, если

$$\varphi^*\Omega = \Omega. \quad (20.2)$$

Вспомним, что $\Omega = -d\omega$, где $\omega = p \cdot dq = \sum p_i dq_i$. Пусть $\gamma = d\sigma^2$. По формуле Стокса имеем

Критерий каноничности. Для любого замкнутого контура $\gamma \subset M$ в области определения координат p, q должно быть

$$\int_{\gamma} p \cdot dq = \int_{\varphi(\gamma)} p \cdot dq. \quad (20.3)$$

Пример. Назовем *сдвигом* преобразование

$$p'_i = p_i, \quad q'_i = q_i - f_i(p, q).$$

Условие (3) приобретает вид $\int_{\gamma} \sum f_i(p, q) dp_i \equiv 0$, т. е. подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_\alpha} \equiv 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial f_j}{\partial p_i},$$

или

$$f_i = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial p_i}. \quad (20.4)$$

Теорема. Фазовый поток g_H гамильтонова векторного поля H состоит из канонических отображений.

Доказательство. Условие каноничности принимает вид

$$I(t) = \int_{g_H^t[\gamma]} p \cdot dq = \int_{\gamma} p \cdot dq = I(0) \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} \equiv 0.$$

Пусть

$$g_H^t[\gamma] = \{p = p(s, t), q = q(s, t) : s \in [0, l], p(0, t) = p(l, t), q(0, t) = q(l, t)\}.$$

Проведем явные вычисления (достаточно вычислить $\frac{dI}{dt} \Big|_{t=0}$):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^l \sum_i p_i(s, t) \frac{\partial q_i(s, t)}{\partial s} ds = \int_0^l \left[\sum \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial s} + \right. \\ &+ \left. \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t \partial s} \right] ds = \int_0^l \sum \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial s} ds + \int_0^l \sum p_i d \frac{\partial q_i}{\partial t} = \\ &= \int_0^l \sum \left[\frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial s} - \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial p_i}{\partial s} \right] ds + \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} \Big|_0^l. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку контур γ — замкнутый. Согласно уравнениям Гамильтона,

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big|_{p(s,0), q(s,0)}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{p(s,0), q(s,0)},$$

откуда

$$\frac{dI}{dt} = \int_0^l \sum \left(- \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial q_i}{\partial s} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial s} \right) ds = 0.$$

Продланное рассуждение — маленький фрагмент теории интегральных инвариантов Пуанкаре.

КАНОНИЧЕСКИЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ. Замена переменных

$$P = P^*(p, q), \quad Q = Q^*(p, q) \quad (20.5)$$

называется *канонической*, если переменные P, Q — снова канонические, как и переменные p, q :

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i = -\Omega = \sum_i dP_i \wedge dQ_i. \quad (20.6)$$

Критерии каноничности. Замена (5) является канонической тогда и только тогда, когда

а) скобка Пуассона вычисляется по одним и тем же формулам в обеих системах координат, т. е.

$$\sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} \right) = \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right);$$

б) матрица Якоби

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)}$$

является симплектической.

Доказательство (а) следует из инвариантного определения скобки Пуассона (18.14) и последующей формулы (18.16). Что касается (б), то оба базиса:

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}; \frac{\partial}{\partial P_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial Q_n}$$

являются симплектическими, так что матрица Якоби $\mathcal{J}$, которая их связывает, тоже является симплектической (матрица Якоби определена с точностью до транспонирования, однако, как мы знаем, при этой операции симплектичность матрицы сохраняется, см. § 17).

Пример канонической замены — перестановка (19.9).

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ. Воспользуемся соображениями взаимности отображений и замен. Сопоставляя формулы (1) и (6), мы видим, что они идентичны, так что доказанные критерии каноничности после должной переформулировки годятся и для замен, и для отображений. В частности, замена (5) является канонической тогда и только тогда, когда для любого контура

$$\int_{\Gamma} p \cdot dq = \int_{\Gamma} P^* \cdot dQ^*$$

или

$$P^* \cdot dQ^* - p \cdot dq = d\Pi(p, q), \quad (20.7)$$

где $\Pi(p, q)$ — некоторая функция, называемая *первообразной*.

Пример. Канонические полярные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2(p, q)$ задаются формулами:

$$p = \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad \sigma = \operatorname{arctg} \frac{q}{p}.$$

Имеем

$$d\sigma = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{p^2}} \frac{p dq - q dp}{p^2} = \frac{p dq - q dp}{p^2 + q^2},$$

$$p d\sigma - p dq = \frac{1}{2} (p dq - q dp) - p dq = d \left(-\frac{pq}{2} \right),$$

$$\Pi = -\frac{pq}{2}.$$

Термин «первообразная канонической замены переменных» в настоящих лекциях введен впервые. По всей видимости, это понятие до сих пор не выделялось, хотя инкогнито первообразные функции и появлялись в литературе, начиная с работ Пуанкаре.

СМЕШАННАЯ ЗАПИСЬ СТАНДАРТНОЙ ЗАМЕНЫ. Каноническая замена переменных называется *стандартной*, если

$$\det \frac{\partial P^*}{\partial p} \neq 0. \quad (20.8)$$

Опираясь на условие (8), из уравнения $P = P^*(p, q)$ выразим $p = \bar{p}(P, q)$ и подставим в $Q = Q^*(p, q)$. В итоге получим *смешанные формулы замены*:

$$p = \bar{p}(P, q), \quad (20.9)$$

$$Q = \bar{Q}(P, q).$$

Тождество (7) выразим через независимые переменные P, q :

$$\begin{aligned} \bar{p} \cdot dq - P \cdot d\bar{Q} &= -d\Pi(\bar{p}(P, q), q), \\ \bar{p} \cdot dq - \bar{Q} \cdot dP &= d \underbrace{[\bar{Q} \cdot P - \Pi(\bar{p}(P, q), q)]}_{S(P, q)} \end{aligned}$$

где $\bar{Q} \cdot P = \sum_i \bar{Q}_i P_i$. Отсюда

$$\bar{p} = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \bar{Q} = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad (20.10)$$

так что смешанные формулы замены порождаются одной функцией, которая называется *производящей*, и удовлетворяют условию, равносильному (5):

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \right\| \neq 0. \quad (20.11)$$

Обратно, если это условие выполнено, то формулы

$$p = \frac{\partial S(P, q)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S(P, q)}{\partial P},$$

будут смешанными для некоторой стандартной замены.

По лемме Каратеодори любая каноническая замена переменных может быть превращена в стандартную несколькими каноническими перестановками. Аппарат производящих функций в этом смысле универсален.

Пример. Снова канонические полярные координаты

$$\rho = \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad \sigma = \arctg \frac{q}{p}.$$

Здесь производящая функция

$$S = \frac{q}{2} \sqrt{2\rho - q^2} + \rho \arctg \frac{q}{\sqrt{2\rho - q^2}}.$$

Задача 57. Пусть $\xi = Sz$ — стандартная линейная каноническая замена (S — симплектическая матрица):

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \det D \neq 0; \xi = (P, Q).$$

Доказать, что:

$$1) \Pi(p, q) = \frac{1}{2}(p \cdot q - P \cdot Q);$$

$$2) S(P, q) = P \cdot D^{-1}q + \frac{1}{2}P \cdot CD^{-1}P - \frac{1}{2}q \cdot D^{-1}Bq.$$

Указания. Использовать условия на A, B, C, D , полученные ранее (в начале § 17); решить задачу сначала в случае $n=1$, т. е. когда A, B, C, D — числа.

ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАМЕН. Векторное поле $\bar{H}$ построено инвариантным образом; в локальных канонических координатах его можно записать так: $I \frac{\partial H'}{\partial z}$ или $I \frac{\partial H''}{\partial \xi}$. При этом $H''(\xi) = H'(z_*(\xi))$, где H' и H'' — конкретные выражения в координатах z и ξ . При канонической замене координат $z = z_*(\xi)$ уравнение Гамильтона $\frac{dz}{dt} = I \frac{\partial H'}{\partial z}$ переходит в $\frac{d\xi}{dt} = I \frac{\partial H''}{\partial \xi}$.

Таким образом, мы сначала делаем замену переменных в гамильтониане, потом дифференцируем, но не преобразуем сами уравнения. Этим канонические замены выгодно отличаются от произвольных.

Пусть нам известны выражения H в различных локальных координатах: $H = H'(p, q)$, $H = H''(P, Q)$. Применяя смешанные формулы замены, имеем $H'(\bar{p}(P, q), q) = H''(P, Q(P, q))$ или, используя производящую функцию,

$$H' \left(\frac{\partial S}{\partial q}, q \right) = H'' \left(P, \frac{\partial S}{\partial P} \right). \quad (20.12)$$

Таким образом, $S(P, q)$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных, которое называется *уравнением Гамильтона—Якоби*.

Задача 58. Путем решения уравнения вида (12):

$$\frac{1}{2} \left(\alpha \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + 2\gamma \frac{\partial S}{\partial q} q + \beta q^2 \right) = \frac{1}{2} \left(P^2 + \mu \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)^2 \right), \quad \alpha > 0,$$

найти все стандартные линейные канонические замены переменных, осуществляющие приведение к нормальной форме из задачи 55.

Указание: получаются формулы

$$c = \pm \sqrt{\frac{\alpha - d^2}{\alpha\beta - \gamma^2}}, \quad b = \frac{1}{\alpha} (\gamma d \pm \sqrt{(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha - d^2)}),$$

которые надо проанализировать, в частности, в зависимости от

знака $\mu = \alpha\beta - \gamma^2$. Полезно предварительно описать замены, сохраняющие нормальную форму.

Уже отмечалось, что состояния равновесия гамильтоновой системы — это критические точки гамильтониана. Если в окрестности равновесия $p=q=0$ разложить H в ряд Тейлора: $H = H_2 + H_3 + \dots$, где H_k — сумма членов степени k , то гамильтониан H_2 даст линейные уравнения, являющиеся приближением для исходных. Сейчас мы увидим, как канонические замены позволяют улучшать качество приближения.

Задача 59. А. Пусть $n=1$, и критическая точка имеет в линейном приближении гиперболический тип:

$$H = \lambda pq + \sum_{m+n=3} \eta_{mn} p^m q^n + O(p^4 + q^4).$$

Найти производящую функцию канонической замены переменных, приводящей гамильтониан к виду

$$H = \lambda PQ + O(P^4 + Q^4).$$

Б. Аналогичное задание для точки эллиптического типа:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \mu q^2) + \sum_{m+n=3} \eta_{mn} p^m q^n + O(p^4 + q^4), \quad \mu > 0.$$

Таким образом, в переменных P, Q линейное приближение на порядок точнее.

Ответ А:

$$S = Pq + \sum \frac{\eta_{mn}}{\lambda(r-m)} q^m P^n.$$

Здесь мы увидели простейшие примеры *преобразования Биркгофа*.

Итак, канонические замены применяются для улучшения гамильтонианов. Пойдем дальше и пожелаем теперь, чтобы H'' не зависело от Q , т. е. чтобы

$$H' \left(\frac{\partial S}{\partial q}, q \right) = H''(P). \quad (20.12')$$

Если мы решим это уравнение в частных производных и осуществим замену, то в новых переменных гамильтонова система легко интегрируется:

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = P_i^0 = \text{const}, \quad (20.13)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial P_i} = \omega_i(P) \Rightarrow Q_i = Q_i^0 + \omega_i(P^0)t.$$

ЭФФЕКТИВНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ. В § 19 была доказана теорема о пополнении: если есть n независимых функций в инволюции $P_1, \dots, P_n$, то существуют еще n функций $Q_1, \dots, Q_n$ таких,

что (P, Q) — канонические координаты. То была теорема существования, а сейчас нам потребуется в каком-то смысле эффективный способ построения функций Q_i . Будем исходить из дополнительного предположения о том, что какие-то канонические координаты p, q в нашем распоряжении уже имеются.

По лемме Каратеодори можно считать $\det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$. Следовательно, локально $p = \bar{p}(P, q)$. Вычислим функцию

$$S(p, q) = \int_{q_0}^q \bar{p}(P, q) dq \quad (20.14)$$

(ниже будет показано, что интеграл не зависит от пути интегрирования). Отметив, что $\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \det \frac{\partial \bar{p}}{\partial P} \neq 0$, мы можем использовать S в качестве производящей. Функции

$$\bar{Q}(P, q) = \frac{\partial S}{\partial P} = \int_{q_0}^q \frac{\partial \bar{p}}{\partial P} dq,$$

$$Q^*(p, q) = \bar{Q}(P(p, q), q)$$

и будут искомыми.

Покажем теперь корректность определения S . Функции $\bar{p}$ фактически задают в виде графика совместные уровни $L_P = \{P = \text{const}\}$, т. е. локально

$$L_P = \{p = \bar{p}(P, q)\}.$$

Таким образом,

$$\int_{q_0}^q \bar{p} \cdot dq = \int_{\gamma} p \cdot dq,$$

где γ — путь из q_0 в q , поднятый на L_P функциями $\bar{p}$. Докажем, что интеграл не зависит от контура или, что то же самое, интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Способ 1 (для тех, кто знаком с понятием сужения дифференциальной формы на подмногообразии). Пусть $\gamma = \partial \sigma^2$, $\sigma^2 \subset L_P$. По теореме Стокса:

$$\int_{\gamma} (p \cdot dq)_{L_P} = \int_{\sigma^2} d[(p \cdot dq)_{L_P}] = \int_{\sigma^2} (d(p \cdot dq))_{L_P} = - \int_{\sigma^2} (\Sigma \lambda p_i \wedge dq_i)_{L_P}.$$

Осталось проверить, что

$$\Omega|_{L_P} = - \Sigma dp_i \wedge dq_i|_{L_P} \equiv 0.$$

Векторные поля $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ линейно независимы и касаются L_P , $\dim L_P = n$; кроме того (еще одно следствие инволютивности),

$$\Omega(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j) = (P_i, P_j) \equiv 0,$$

что и доказывает требуемое.

Способ 2 (непосредственный). Покажем, что

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial q_k}. \quad (20.15)$$

Поскольку $P_\alpha^*(\bar{p}(P, q), q) \equiv P_\alpha$, после дифференцирования

$$\frac{\partial P_\alpha^*}{\partial q_i} + \sum_s \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_s} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial q_i} \equiv 0. \quad (20.16)$$

Условие $(P_\alpha^*, P_\beta^*) \equiv 0$ можно представить в виде

$$\sum_j \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_j} \frac{\partial P_\beta^*}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial P_\beta^*}{\partial p_k} \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial q_k},$$

откуда в силу (16)

$$\begin{aligned} \sum_{j, k} \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_j} \frac{\partial P_\beta^*}{\partial p_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_j} &= \sum_{k, j} \frac{\partial P_\beta^*}{\partial p_k} \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_k}, \\ \sum_{j, k} \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_j} \left(\frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_k} \right) \frac{\partial P_\beta^*}{\partial p_k} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь мы видим, что матрица

$$\left\| \frac{\partial \bar{P}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \bar{P}_j}{\partial q_k} \right\| \quad (20.17)$$

множится с одной стороны на невырожденную матрицу

$$\left\| \frac{\partial P_\alpha^*}{\partial p_j} \right\|,$$

а с другой — на транспонированную к ней. В итоге получается нулевая матрица. Следовательно, и сама матрица (17) равна нулю, что и доказывает (15).

Теорема о пополнении, как и все другие локальные теоремы, на практике часто эффективна отнюдь не в малых областях — неформальное обстоятельство, определяющее ее ценность (как и всех других локальных теорем).

СВОЙСТВО ИНТЕГРИРУЕМОСТИ. Поле $\bar{H}$ (или уравнение $\dot{z} = I \frac{\partial \bar{H}}{\partial z}$) называется *вполне интегрируемым* в некоторой области, если в ней у него есть n независимых первых интегралов в инволюции $F_1, \dots, F_n$, т. е. $(F_i, H) \equiv 0$, $(F_i, F_j) \equiv 0$, и $\text{rang} \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = n$ везде, кроме множества точек, не содержащего никакой открытой подобласти.

К числу интегрируемых (во всем фазовом пространстве) относятся задачи с n степенями свободы и $n-1$ циклическим интегралом (движение в центральном поле сил, сферический маятник, случай Лагранжа, лиувиллевы системы — задача о геодезичес-

ких на эллипсоиде, задача двух неподвижных центров, задача Лагранжа). Здесь список интегралов нам уже известен (§ 16, 8, 9). Менее очевиден набор интегралов в инволюции для задач с тремя степенями свободы и интегралом кинетического момента: задача Кеплера, вообще движение в центральном поле сил (см. задачу 51, в) и случай Эйлера вращения твердого тела. Здесь интегралами в инволюции являются полная энергия, одна из компонент кинетического момента и квадрат его модуля.

Возьмем в качестве первых n канонических координат функции $P_i = F_i(z)$, а еще n функции Q построим по теореме о пополнении. Тогда

$$H = H''(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n).$$

Но функции P_i — это первые интегралы поля $\vec{H}$, так что

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial Q_i} \equiv 0.$$

Следовательно, выражение H'' зависит только от переменных P . В частности, если интегралы выписаны в канонической системе координат p, q , то пополнение мы сможем произвести эффективно, т. е. решим уравнение Гамильтона—Якоби (12').

Теорема Лиувилля. Если система уравнений Гамильтона имеет n первых интегралов в инволюции, то она интегрируется в квадратурах: при помощи алгебраических операций, обращения функций, интегрирования и дифференцирования (для доказательства достаточно посмотреть, что делалось выше при эффективном пополнении).

Еще раз о локальности. Теорема Лиувилля, равно как и предыдущие теоремы, формально носит сугубо локальный характер. Из доказательства теоремы Дарбу следует, что всякая гамильтонова система вполне интегрируема в окрестности любой неособой своей точки. На практике, однако, нас не интересует потенциальное и бессодержательное существование интегралов в малом. Нам важны случаи, когда явно предъявляются первые интегралы движения, определенные во всем или почти всем фазовом пространстве задачи. Вместе с тем, поскольку на практике мы всегда имеем дело с аналитическими функциями, поведение которых в целом, как известно, определяется поведением в малом, то, опираясь на локальные теоремы, мы сможем в конце концов получать заключения нелокального характера о фазовом потоке.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ. Пусть L_c — неособая связная компактная компонента совместного уровня интегралов вполне интегрируемой системы. Тогда по теореме о фазовых торах она и (все близкие) диффеоморфна n -мерному тору.

Теорема. В сделанных предположениях в окрестности L_c существуют канонические координаты $\rho_i, \sigma_i \bmod 2\pi$ такие, что

$$F_i = F_i(\rho), \quad H = H(\rho).$$

Они называются *переменными действие — угол*; σ_i суть угловые переменные на торе $T^n(\rho) = L_c$, $c = F(\rho)$.

Доказательство. По теореме о пополнении существуют канонические координаты $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ такие, что (19.8)

$$P_i = F_i(p, q), \quad \tilde{F}_i = \frac{\partial}{\partial Q_i}. \quad (20.18)$$

Таким образом, Q_i локально играют роль s_i из доказательства теоремы о фазовых торах: $Q_i = s_i + C_i$, где C_i зависят от окрестности. Играя C_i , мы можем согласовывать Q между соседними окрестностями, так что в итоге вправе считать, что Q_i совпадают с s_i на всем торе и представляют собой многозначные координаты: существуют n линейно независимых векторов ξ_α таких, что точка с координатами

$$P_i' = P_i, \quad Q_i' = Q_i + \xi_{\alpha i} \quad (20.19)$$

совпадает с точкой P, Q . Имеем $\xi_{\alpha i} = \xi_{\alpha i}(P)$, так как теперь мы рассматриваем не один тор, как в § 18, а семейство их, зависящее от P . Отображение (19) в фазовом пространстве тождественно и потому канонично; в пространстве переменных P, Q сдвиг (19) также является каноническим, так что по формуле (4)

$$\frac{\partial \xi_{\alpha i}}{\partial P_j} = \frac{\partial \xi_{\alpha j}}{\partial P_i}. \quad (20.20)$$

Отсюда вытекает, что

$$\xi_{\alpha i} = 2\pi \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_i}, \quad (20.21)$$

где $\rho_\alpha(P)$ — некоторые независимые функции, поскольку $\det \|\xi_{\alpha i}\| \neq 0$. Положим теперь

$$Q_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \sigma_\alpha. \quad (20.22)$$

Очевидно, что $\sigma_\alpha \bmod 2\pi$. Наконец,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i &= \sum_i dP_i \wedge d \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_i} \sigma_\alpha \right) = \sum_{\alpha, i} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_i} dP_i \wedge d\sigma_\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha, i, j} \sigma_\alpha \frac{\partial^2 \rho_\alpha}{\partial P_i \partial P_j} dP_i \wedge dP_j = \sum_{\alpha} d\rho_\alpha \wedge d\sigma_\alpha + 0, \end{aligned}$$

так что переменные ρ, σ — канонические.

Задача 60. Установить каноничность, выразив попарные скобки Пуассона переменных P, Q через скобки функции ρ, σ .

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ. Поскольку $H = H(\rho)$, общее решение уравнений Гамильтона получается по формулам (13) в виде

$$\rho = \rho_i^0, \quad \sigma = \sigma_i^0 + \omega_i(\rho^0)t, \quad (20.23)$$

где функции

$$\omega_i(\rho) = \frac{\partial H}{\partial \rho_i}$$

называются *частотами* системы. Пусть для простоты $n=2$. На плоскости переменных σ_1, σ_2 формулы (23) задают прямую. Этот образ, однако, нас не устроит, так как при изменении любого из углов на 2π нам следовало бы возвращаться в ту же точку, чего на плоскости не происходит. Короче говоря, из плоскости надо получить тор. Сделаем это поэтапно. Сначала учтем, что $\sigma_1 \bmod 2\pi$ и свернем плоскость в цилиндр (так же, как на примере с математическим маятником в § 16). В результате прямая преобразуется в винтовую линию. Затем учтем, что $\sigma_2 \bmod 2\pi$ и свернем цилиндр в тор (если оставаться в $\mathbb{R}^3$, то без деформаций не обойтись). Результат см. на рис. 76. Винтовая линия перейдет в так называемую обмотку тора, которая совершенно не обязана быть замкнутой кривой. Последнее происходит лишь в случае, когда

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0,$$

где m_1 и m_2 — целые числа, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$. В противном случае обмотка всюду плотна на торе.

Если на рис. 76 не обращать внимания на то, что часть фазовой кривой изображена пунктиром, то мы увидим типичное поведение траектории в центральном поле сил и вообще в системе с циклической координатой. Таким образом, область возможности движения типа кольца есть в некотором смысле (несложные уточнения опускаем) проекция фазового тора на многообразие положений, а траектория движения есть проекция фазовой обмотки тора. Аналогичные утверждения справедливы и в случае Лагранжа движения тела с неподвижной точкой, только здесь обмотки проектируются с некоторым перекосом.

Пример. Гармонический осциллятор:

$$H = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + \beta q^2), \quad \alpha = 1/m, \quad \beta = k > 0.$$

Гиперболическим поворотом $P = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}} p$, $Q = \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} q$ гамильтониан приводится к виду $H = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} (P^2 + Q^2)$, после чего остается ввести канонические полярные координаты $\rho = (P^2 + Q^2)/2$, $\sigma = \arctg(Q/P)$. Это и будут переменные действие — угол:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} p^2 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} q^2 \right), \quad \sigma = \arctg \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{q}{p}.$$

Обратные формулы:

$$p = \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{2\rho} \cos \sigma, \quad q = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{2\rho} \sin \sigma.$$

Наконец, $H = \sqrt{\alpha\beta} \rho$, частота $\omega = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{k/m}$ совпадает с частотой колебаний осциллятора.

Задача 61. Пусть точка на сфере движется по инерции.

А. Положение точки определим обычными сферическими координатами θ, ψ (8.7). Показать, что компоненты кинетического

момента $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$, переписанные в переменных $\theta, \psi, \rho_\theta, \rho_\psi$, находятся в инволюции с гамильтонианом H , а их попарные скобки удовлетворяют соотношениям (16.9), как и для свободной точки.

Б. Пусть Π — плоскость, перпендикулярная постоянному вектору кинетического момента, прямая $O\bar{f}$ — пересечение ее с плоскостью Oxy , σ_1 — угол между осью Ox и прямой $O\bar{f}$, а σ_2 — угол между прямой $O\bar{f}$ и радиусом-вектором точки. Показать, что переменные $\rho_1 = \Lambda_z$, $\rho_2 = |\Lambda|$, σ_1, σ_2 являются каноническими, что это переменные действие — угол для движения по инерции и что $H = \rho_2^2 / 2mr^2$.

Примечание. Аналогичная конструкция используется для введения переменных действие — угол в задаче Кеплера и в случае Эйлера вращения твердого тела. Как и задача о геодезических на сфере, эти задачи относятся к числу вырожденных (гамильтониан зависит не от всех переменных действия).

ЭФФЕКТИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ. Существование переменных ρ, σ было установлено на произвольном каноническом многообразии и без предположения, что интегралы в инволюции заданы в какой-либо канонической системе координат. Если это предположение все же выполнено, то мы можем воспользоваться эффективным пополнением и получить смешанные формулы замены:

$$p = \bar{p}(P, q) \equiv \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \bar{Q}(P, q) \equiv \frac{\partial S}{\partial P}, \quad S = S(P, q).$$

Отметим, что матрица $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q}$ невырождена, так что из последней группы формул можно получить $q = q_*(P, Q)$, и при этом матрица $\frac{\partial q_*}{\partial Q} = \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial q} \right)^{-1}$ также невырождена.

«Презумпция аналитичности» (согласно которой соотношения, установленные локально, дают правильный результат и глобально) позволяет нам считать, что зависимости $q = q_*(P, Q)$ пригодны на интегральных торах в целом. Поэтому будем искать векторы ξ_α , решая систему уравнений:

$$\bar{f}(P, Q, \xi) \equiv q_*(P, Q + \xi) - q_*(P, Q) = 0. \quad (20.24)$$

Нам известно, что у этой системы имеется n базисных решений (общее решение имеет вид $\sum n_\alpha \xi_\alpha$, где n_α — целые), причем от Q они не зависят (так что решение можно начать с того, что положить $Q=0$). Когда векторы $\xi_\alpha(P)$ найдены, вычисляем σ_α , обращая зависимости (22), и находим $\rho_\alpha(P)$ интегрированием уравнений (21). Таким образом, переменные действие — угол вычисляются в квадратурах как функции P, Q и затем ρ, q . Разумеется, речь идет о принципиальной возможности. На практике любой шаг может вывести за рамки элементарных или специальных функций, и мы даже не сможем записать конкретный результат.

Пример. Снова гармонический осциллятор. Возьмем

$$P = H(p, q) = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + \beta q^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} p = \sqrt{\frac{2P - \beta q^2}{\alpha}} &\Rightarrow S = \int_0^q \sqrt{\frac{2P - \beta q^2}{\alpha}} dq = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^q \sqrt{\frac{2P}{\beta} - q^2} dq \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^q \frac{1}{\beta} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2P}{\beta} - q^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2P}{\beta}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{\beta}} \sin \sqrt{\alpha\beta} Q \Rightarrow \sin \sqrt{\alpha\beta} (Q + \xi) = \sin \sqrt{\alpha\beta} Q \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} \Rightarrow \frac{dp}{dP} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \sigma \Rightarrow p = \frac{P}{\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \sigma = \sqrt{\alpha\beta} Q \Rightarrow q = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{2P} \sin \sigma, \quad p = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{2P} \cos \sigma, \end{aligned}$$

как и было получено ранее. Пользование «презумпцией аналитичности» состояло в том, что мы не написали $\pm$ перед радикалом и в качестве функции обратной к $\arcsin$, взяли $\sin$ со всей его областью определения.

Обобщение примера. Пусть имеем гамильтонову систему с одной степенью свободы, уровни энергии которой $H(p, q) = h$ компактны (по крайней мере в некоторой области на $\mathbf{R}^2(p, q)$), т. е. топологически представляют собой окружности (одномерные торы). Положим $P = H(p, q)$. Тогда

$$p = f(P, q) \Rightarrow S = \int_{q_0}^q f(P, q) dq \Rightarrow Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \int_{q_0}^q \frac{\partial f}{\partial P} dq.$$

После обхода уровня переменная Q получит приращение:

$$\xi = \oint_{H(p, q)=P} \frac{\partial f}{\partial P} dq = \frac{d}{dP} \oint f(P, q) dq = \frac{d}{dP} S(P),$$

где $S(P)$ — площадь области, заключенной внутри кривой $H(p, q) = P$. Следовательно, в качестве переменной действия можно взять $S(P)/2\pi$.

Этот вывод дополним указанием на смысл величины ξ в данном случае. Заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial P} = 1 \bigg/ \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dH}{dp} = \frac{dq}{dt}.$$

Поэтому

$$Q = \int_{q_0}^q \frac{\partial f}{\partial P} dq = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\frac{dq}{dt}} = \int_{q_0}^q dt$$

имеет смысл времени движения от точки q_0 до точки q вдоль фазовой траектории $H(p, q) = P = h$, а приращение ξ после обхода кривой — смысл периода решения τ . Итак, $\xi = \tau(h) = S'(h)$.

Задача 62. Отображение (замена переменных) вида

$$p' = p, \quad \sigma' = \sigma + f(p)$$

в канонических полярных координатах называется *каноническим кручением*.

А. Пусть есть каноническое отображение плоскости

$$p' = p'(p, q), \quad q' = q'(p, q),$$

сохраняющее функцию F :

$$F(p', q') = F(p, q).$$

Показать, что в окрестности неособой связной компактной компоненты уровня $F = c_0$ существуют канонические координаты

$$p, \sigma \bmod 2\pi$$

такие, что в них отображение имеет вид канонического кручения.

Б. Пусть

$$p, \sigma \bmod 2\pi; \quad p', \sigma' \bmod 2\pi$$

два варианта переменных действие — угол для системы с одной степенью свободы. Показать, что они связаны зависимостью вида

$$p' = p + \text{const}, \quad \sigma' = \sigma + f(p),$$

т. е. сдвигом действия и каноническим кручением (но здесь это уже не отображение, а замена переменных).

Вопрос. Какие возможны обобщения результатов этой задачи на случай многих степеней свободы? Какую роль может играть предположение с невырожденности системы $\left(\det \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \neq 0\right)$

при обобщении п. Б?

Задача 63. Допустим, что решение системы уравнений $P_i = F_i(p, q)$ имеет вид $p_i = f_i(P, q_i)$, пусть последние равенства при заданных P задают замкнутые кривые на плоскостях $\mathbb{R}^2(p_i, q_i)$. Доказать, что в качестве переменных p_i можно взять площади внутри этих кривых, деленные на 2π .

В частности, такая возможность представляется в случае, когда гамильтониан допускает простое или сложное разделение переменных (см. § 16). Например, в лиувиллевой системе

$$H = [\Sigma f_i(q_i)]^{-1} \left[\Sigma \left(\frac{p_i^2}{2} + V_i(q_i) \right) \right],$$

первые интегралы приводят к

$$\frac{1}{2} p_i^2 + V_i(q_i) - h f_i = c_i, \quad \Sigma c_i = 0,$$

так что

$$\rho_i(h, c_i) = \frac{1}{\pi} \int_{q_i^-(h, c_i)}^{q_i^+(h, c_i)} \sqrt{2(c_i + hf_i - V_i)} dq_i,$$

где q_i^+ , q_i^- — границы области неотрицательности подкоренного выражения (для простоты считаем ее отрезком). Полезно сравнить сказанное с материалом в конце § 9. Области возможности движения $\mathfrak{M}^{ch}$, о которых там идет речь в случае $n=2$, часто имеют вид прямоугольников в переменных (q_1, q_2) , причем это действительно прямоугольники в рассматриваемой метрике. Прямоугольники $\mathfrak{M}^{ch}$ являются проекциями торов L_{ch} из фазового пространства в пространство положений. Чтобы представить себе, как такое могло получиться, надо склеить плоский тор из листа бумаги.

НЕИНВОЛЮТИВНЫЙ НАБОР ИНТЕГРАЛОВ. Приведем пример задачи с n степенями свободы, в которой имеется ровно n интегралов движения, но они не находятся в инволюции: пусть по сфере движутся две точки, причем потенциальная энергия действующих сил зависит только от расстояния между ними. Тогда сохраняются полная энергия и три компоненты суммарного кинетического момента системы — эти последние и имеют ненулевые скобки Пуассона.

§ 21. УРОВЕНЬ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЯ

ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ. Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \quad (21.1)$$

Положим формально $d\tau = \Pi(x) dt$, тогда

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\Pi(x)} X(x). \quad (21.2)$$

Содержание перехода от системы (1) к системе (2) состоит в следующем. Пусть $\bar{x} = x(t, x_0)$ — общее решение системы (1) и задана функция $\Pi(x)$, сохраняющая знак в этой области. Вдоль каждого решения можно вычислить функцию:

$$\tau = \tau^*(t, x_0) = \int_0^t \Pi(x(t, x_0)) dt,$$

которая монотонна на всем интервале определения решения и потому имеет обратную: $t = t_*(\tau, x_0)$. Подставим последнюю зависимость в общее решение; тогда

$$\bar{x} = \bar{x}(\tau, x_0) = \bar{x}(t_*(\tau, x_0), x_0)$$

есть общее решение системы (2). Действительно

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{d\bar{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = X(\bar{x}(\tau, x_0)) \cdot \frac{1}{\Pi(\bar{x}(\tau, x_0))}.$$

ГАМИЛЬТОНОВ СЛУЧАЙ. В случае системы в канонической форме

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (21.3)$$

после замены $d\tau = \Pi(p, q) dt$ получим

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{\Pi} \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{\Pi} \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (21.4)$$

Вообще говоря, правые части не обязаны быть частными производными по q, p некоторой функции $F(p, q)$, так что уравнения (4) не будут каноническими.

УРОВЕНЬ ПРИТЯЗАНИЙ. Если мы все же хотим остаться в рамках гамильтонова формализма, то придется ограничиться решениями, лежащими на одном фиксированном (хотя и произвольно фиксированном) уровне энергии $H(p, q) = h$. Введем функцию

$$F(p, q) = \frac{1}{\Pi} (H - h), \quad (21.5)$$

и рассмотрим систему с гамильтонианом $F(p, q)$:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{1}{\Pi} \frac{\partial H}{\partial q} - (H - h) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Pi} \right), \quad \frac{dq}{d\tau} = \dots \quad (21.6)$$

Видим, что во всех точках уровня $H = h$ система (6) совпадает с системой (4). Для системы (6) это уровень $F = 0$.

Короче говоря, замену времени в гамильтоновой системе можно сделать только на уровне энергии. Кстати, сложное разделение переменных таким путем сводится к простому.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ. Ограничимся простейшей задачей о движении точки по прямой под действием силы тяготения Ньютона с нулевой начальной скоростью из положения r_0 в момент $t_0 = 0$. Тогда $h = -1/r_0 < 0$. Функция $r(t)$ убывает и

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2\left(h + \frac{1}{r}\right)}.$$

При $r \rightarrow 0$ время t стремится к конечному пределу $\bar{t}$, причем

$$r(t) = O(\bar{t} - t)^{2/3}. \quad (21.7)$$

Точка за конечное время достигает $r = 0$. Таким образом, фазовый поток в данном случае стеснен, так как движения определены на конечном интервале времени. Попробуем произвести замену

$$r = s^2/2. \quad (21.8)$$

Тогда $H = \frac{p_s^2}{2s^2} - \frac{2}{s^2} = h$. Замена времени $d\tau = \frac{2dt}{s^2} = \frac{dt}{r}$ приводит нас к системе с гамильтонианом

$$F(p_s, s) = \frac{p_s^2}{4} - \frac{hs^2}{2} \quad (21.9)$$

на уровне $F=1$. Поскольку $h < 0$, это — гамильтониан гармонического осциллятора. Поэтому

$$s = (-2/h)^{1/2} \cos(-h/2)^{1/2} \tau.$$

Значение $s=0$ достигается по-прежнему за конечное время τ , однако выражение для F таково, что F продолжается непрерывно, гладко и даже аналитично на множество $s=0$. Фазовый поток системы с гамильтонианом F нестеснен. В силу (8) точка упруго отражается от притягивающего центра (а не проскакивает по другую сторону от него).

Этот прием в небесной механике получил название регуляризации. В задаче многих тел производится аналогичная регуляризация двойных столкновений (когда стремится к нулю расстояние ровно между двумя из n тел): сохраняется и асимптотика (7) и явление упругого отражения.

НЕАВТОНОМНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ. Будем рассматривать системы канонического вида:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (23.11)$$

в которых теперь будем считать $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$.

Откуда берутся такие системы? Например, неавтономную гамильтонову систему можно рассматривать как сужение некоторой автономной системы на уровень энергии. Именно, пусть имеем автономную систему

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Зафиксируем произвольно константу энергии:

$$\mathcal{H}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}) = h. \quad (21.12)$$

Предположим, что в окрестности произвольно взятой точки, не являющейся состоянием равновесия, выполнено условие

$$\frac{dq_{n+1}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+1}} \neq 0;$$

тогда локально уровень $\mathcal{H} = h$ можно задать в виде графика, выразив p_{n+1} из равенства (12):

$$p_{n+1} = -H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{n+1}, h).$$

Положив $\tau = q_{n+1}$, по теореме о неявной функции получим

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau, h).$$

Это — так называемые уравнения Уиттекера. Понизив порядок системы на две единицы, мы потеряли автономность и получили систему с параметром. С точки зрения практического интегрирования выигрыш, таким образом, незначителен. Однако в теоретических исследованиях прием понижения порядка применяется, и с пользой.

Если же неавтономная система (11) задана сама по себе, то достаточно взять

$$\mathcal{H} = p_{n+1} + H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}).$$

Этот прием потребует в нижеследующей теореме.

НЕАВТОНОМНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.
Ограничимся рассмотрением замен переменных. Замена

$$P = P^*(p, q, t), \quad Q = Q^*(p, q, t)$$

называется канонической, если при каждом фиксированном t она является канонической в смысле § 20. Таким образом, мы можем пользоваться аппаратом производящих функций, в которых t будет фигурировать в качестве параметра. Смешанные формулы замены будут:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P},$$

$$S = S(P, q, t), \quad \det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0.$$

Теорема. После канонической замены переменных уравнения (11) преобразуются в уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q},$$

где функции $H(p, q, t)$ и $\tilde{H}(P, Q, t)$ связаны тождеством

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = \tilde{H}\left(P, \frac{\partial S}{\partial P}, t\right)$$

(следует обратить внимание, что это тождество написано в переменных P, q, t , а не в переменных p, q, t или P, Q, t).

Комментарий. Если мы захотим, чтобы гамильтониан $\tilde{H}$ тождественно равнялся нулю, то функция $S(P, q, t)$ должна будет удовлетворять условию

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

Это — уравнение Гамильтона—Якоби в классическом виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ. МЕХАНИКА В КАРТИНКАХ

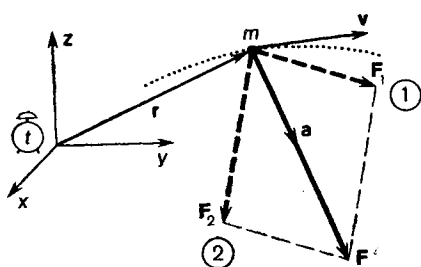


Рис. 1. В инерциальной системе отсчета воздействие на материальную точку других объектов характеризуется векторами сил, которые складываются по правилу параллелограмма. Считая, что сама точка обратного воздействия не оказывает, имеем уравнение Ньютона $ma = F(v, r, t)$

Рис. 2. Моделирование взаимодействия осуществляется на основе понятия «система материальных точек». Предполагается, что движение объектов, не включенных в систему, с течением времени известно. Воздействие на точки системы со стороны этих объектов характеризуется внешними силами, взаимодействие между точками — внутренними силами. После суммирования сила, действующая на каждую точку, зависит от состояния всей системы и от времени; поэтому вычислить движение этой точки отдельно, вообще говоря, невозможно

Добавление. Кроме того, часть воздействий или взаимодействий может моделироваться указанием их конечного результата, т. е. наложением голономных связей — функциональных соотношений, в силу которых расположение точек в пространстве не может быть произвольным (это на рисунке не отражено). Например, если потребовать, что все попарные расстояния между точками не меняются, то будем иметь модель твердого тела. Другие воздействия, например, приводящие к качению твердого тела без проскальзывания, могут описываться более сложными неголономными связями, ограничивающими распределение скоростей в системе

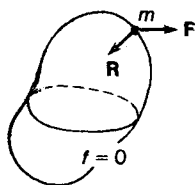
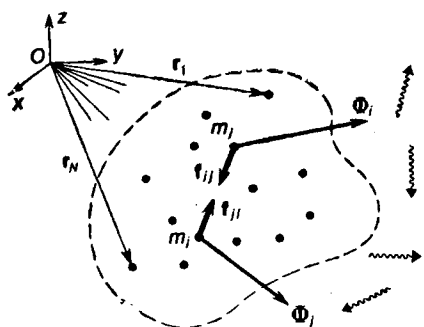


Рис. 3. Движение точки по поверхности, гладкой в смысле непрерывной дифференцируемости (для простоты — бесконечной) и гладкой в смысле «нешероховатой»: сила реакции, удерживающая точку на поверхности, ей ортогональна (идеальная связь). Движение системы материальных точек со связями также можно интерпретировать как движение некоторой точки по многообразию положений в евклидовом пространстве высокой размерности

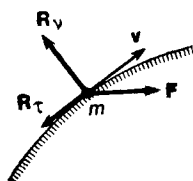


Рис. 4. Движение точки по кривой, взаимодействие с которой может привести к появлению касательной силы реакции (неидеальная связь). В этом случае необходимо предлагать какую-либо конкретную модель для этой силы; в первую очередь указав зависимость ее от скорости. Основными являются две модели: вязкое трение (зависимость — линейная или вообще нечетная гладкая функция) и сухое трение (зависимость разрывная типа функции sgn)

Рис. 5. Пример освобождающей связи: маятник на нити. Связь записывается в виде неравенства

$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

При движении со скоростью достаточно небольшой (колебания) и достаточно большой (вращение) равенство сохраняется постоянно. В промежутке возможны движения, при которых натяжение нити (сила реакции) обращается в нуль и точка покидает окружность — равенство нарушается

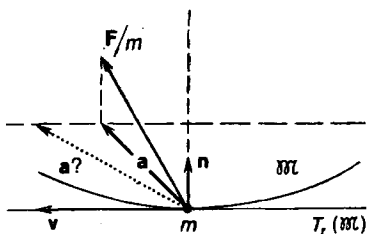
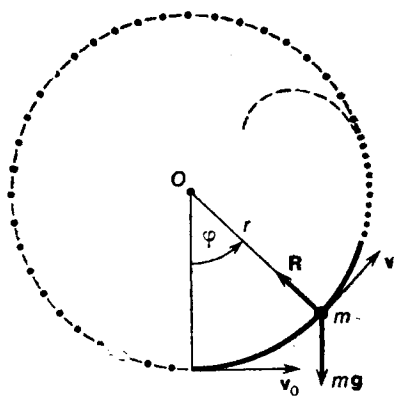


Рис. 6. Принцип Гаусса. Пусть в данном положении точка имеет заданную скорость (т. е. зафиксировано ее состояние). Тогда концы всех мыслимых ускорений заметают плоскость, параллельную касательной. Разность $F/m - a$ ортогональна этой плоскости в точности для того из мыслимых ускорений, квадратичное отклонение которого от вектора F/m (ускорение освобожденного движения) минимально

Прим. 1) Таким образом, определение движений точки, на которую наложена идеальная связь, прямо (см. рис. 3) или опосредованно (принцип д'Аламбера—Лагранжа, принцип Гаусса) содержит условие того, что сила реакции $R = F - ma$ ортогональна поверхности, по которой движется точка. 2) Этот частный вариант принципа Гаусса легко распространяется на систему материальных точек: в заданном состоянии квадратичные отклонения суммируются и сумма минимизируется

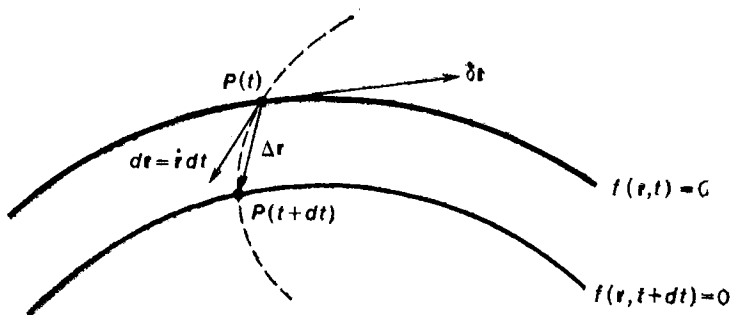


Рис. 7. Связь, зависящая от времени. Следует ясно различать фактическое перемещение Δr за время dt , соответствующее «действительное» перемещение dr (разница — на бесконечно малую более высокого порядка, чем dt) и, наконец, возможное (виртуальное) перемещение δr , которое прямого отношения к процессу движения не имеет, но как бы инфинитезимально указывает на допустимые положения системы, близкие к заданному в текущее мгновение

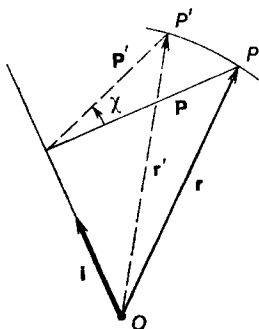


Рис. 8. Изображение конечного поворота на угол χ вокруг оси Oi . При достаточно малых χ дуга PP' с точностью до бесконечно малых более высокого порядка совпадает с перпендикуляром к плоскости векторов r, i . Разделив на время τ , за которое совершался поворот, и устремив τ к нулю, в пределе получим формулу распределения скоростей в теле с неподвижной точкой O

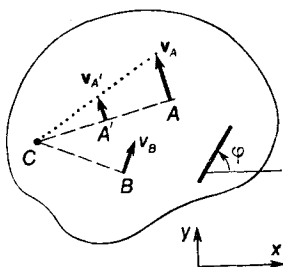
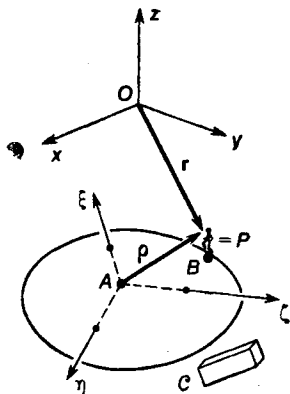


Рис. 9. Распределение скоростей в плоском твердом теле в каждое мгновение выглядит так, как если бы тело постоянно вращалось вокруг некоторой точки C , называемой мгновенным центром скоростей. Изображен также способ определения абсолютного угла поворота тела: на теле мысленно отмечается некоторый отрезок и берется угол, который этот отрезок составляет с каким-либо неподвижным направлением



Для опорного тела
(здесь $\omega \equiv \omega_{\text{пер}}$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\text{пер}}$):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + [\omega \times \overline{AB}]$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + [\varepsilon \times \overline{AB}] + [\omega \times [\omega \times \overline{AB}]]$$

Для точки P :

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}$$

$$\mathbf{a}_{abc} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}} + 2[\omega_{\text{пер}} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]$$

Для тела C :

$$\omega_{abc} = \omega_{\text{пер}} + \omega_{\text{отн}}$$

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{\text{пер}} + \varepsilon_{\text{отн}} + [\omega_{\text{пер}} \times \omega_{\text{отн}}]$$

Рис. 10. Неподвижная и подвижная системы координат; вторая явно связана с некоторым твердым телом — «опорным», движение которого можно условно назвать переносом. Рассматривается движение точки P и движение еще одного твердого тела $\mathcal{Z}$; кинематические характеристики движения (скорость и ускорение точки P , угловая скорость и угловое ускорение тела $\mathcal{Z}$), вычисленные с точки зрения систем $Oxyz$ и $O\xi\zeta$, называются соответственно абсолютными и относительными. В данное мгновение движущаяся точка P оказалась в точке B опорного тела: абсолютные скорость, ускорение точки B называются переносными для точки P в это мгновение

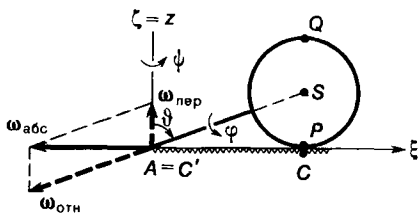
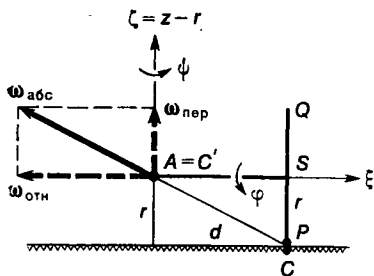
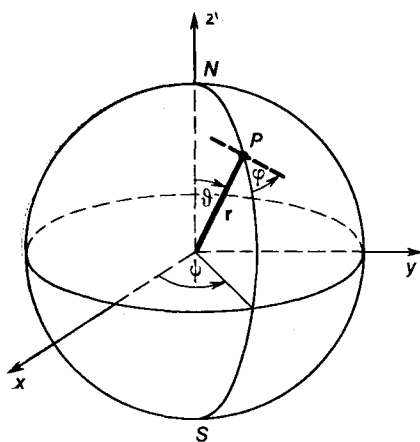


Рис. 11 и 12. Диск со штангой (AS) и шар со штангой (AS) катятся по плоскости; конец штанги (A) неподвижен (изображен вид сечения). Мгновенная ось вращения CC' проходит через неподвижную точку $A=C'$ и через ту точку диска или шара P , которой катящееся тело в данное мгновение соприкасается с плоскостью ($P=C$): скорость этой точки (в данное мгновение) равна нулю. Вместе с тем сама точка касания C как видимый образ движется по плоскости с ненулевой скоростью. Подвижная система координат (угол поворота ψ) вращается так, что в ней точка касания неподвижна и происходит вращение тела вокруг штанги; абсолютная угловая скорость есть сумма переносной и относительной. Указанное на чертеже направление отсчета угла φ не совпадает с фактическим направлением вращения



Достаточно рассмотреть
„координатные движения“

$$\mathbf{v} = \underbrace{r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi}_{\pi/2} + \underbrace{\dot{r} \mathbf{e}_r}_{\pi/2} + \underbrace{\dot{\psi} r \sin \theta \mathbf{e}_\psi}_{\pi/2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \underbrace{\dot{\varphi} \mathbf{i}_\varphi}_{\pi/2} + \underbrace{\dot{\psi} \mathbf{i}_\psi}_{\pi/2} + \underbrace{\dot{\theta} \mathbf{i}_\theta}_{\pi/2}$$

Рис. 13. Сферические координаты и углы Эйлера. Углы θ и ψ задают положение точки P на сфере радиуса r . Если считать величину r переменной, то получим сферические координаты в пространстве (в плоскости Oxy при этом получаются полярные координаты). Если OP — отмеченное направление в твердом теле (например, ось симметрии), то в дополнение к θ и ψ вводится еще угол φ поворота некоторой плоскости, связанной с телом, относительно плоскости NPS (ср. с одноименными углами на рис. 11 и 12). Углы θ , ψ , φ называются углами Эйлера (обычно вместо ψ берется $\psi + \pi/2$)

Рис. 14. Три точки равных масс находятся в вершинах равностороннего треугольника и имеют равные по модулю скорости. Таким образом, кинетическая энергия (и потенциальная в случае попарного взаимодействия) во всех трех вариантах одна и та же.

Различие состоит в следующем. В первом варианте импульс и кинетический момент относительно центра треугольника оба равны нулю, во втором импульс равен нулю, момент — нет (более того, он максимален по модулю), в третьем случае наоборот (и импульс максимален по модулю)

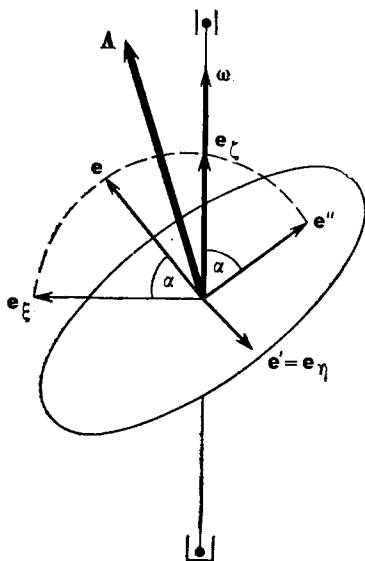
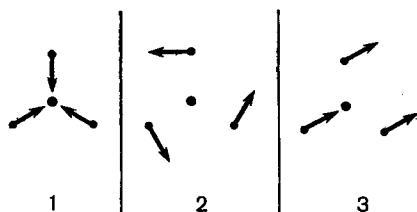


Рис. 15. Вращающийся диск. Пример того, что кинетический момент твердого тела с неподвижной точкой в общем случае не коллинеарен вектору угловой скорости (если ось вращения не является главной). Это расхождение — почти недоступное зрительному восприятию — является ключом к объяснению закономерностей динамики твердого тела, некоторые из которых поначалу кажутся странными. В данном частном случае в концах оси вращения возникают значительные боковые усилия (ведущие к износу подшипников), несмотря на то что центр масс диска находится на оси вращения

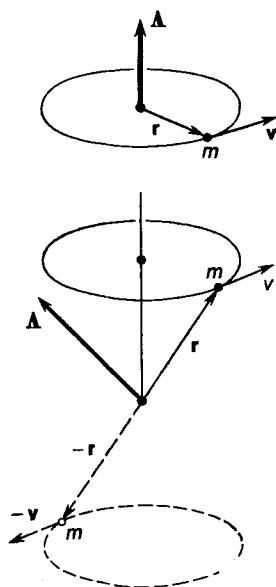


Рис. 16. Кинетический момент массы, равномерно движущейся по окружности. Если начало координат находится в центре окружности, то момент перпендикулярен плоскости движения. Если начало координат проектируется в центр, то кинетический момент постоянен по модулю, но уже не направлен по нормали и заметает круговой конус (кстати, отсюда вытекает смещение кинетического момента на рис. 15, так как он получается суммированием кинетических моментов всех частиц тела; для большей ясности надо взять не диск, а палочку). В остальных случаях момент будет менять и величину и направление

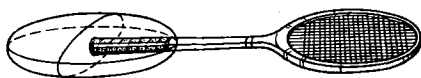


Рис. 17. Эллипсоид инерции теннисной ракетки, построенный в конце ее ручки, вытянут в направлении наименьшего момента инерции и сжат в направлении наибольшего

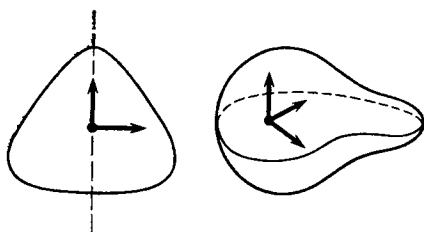


Рис. 18. Ось симметрии — главная, плоскость симметрии — главная

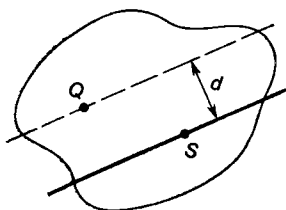


Рис. 19. Если ось параллельно перенести на расстояние d от центра масс, то соответствующий момент инерции увеличится на Md^2

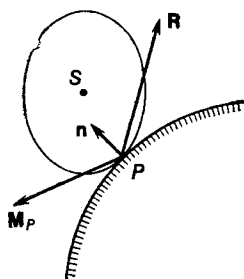


Рис. 21. Взаимодействие тела с поверхностью характеризуется силой реакции R и моментом M_P , приложенными в точке соприкосновения. Выбор конкретной модели взаимодействия состоит в указании способа вычисления этих векторов

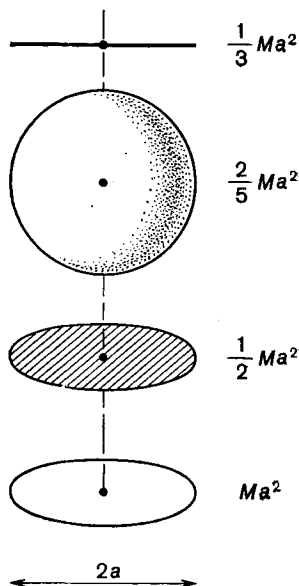


Рис. 20. Моменты инерции однородных тел: отрезка, окружности, круга и шара

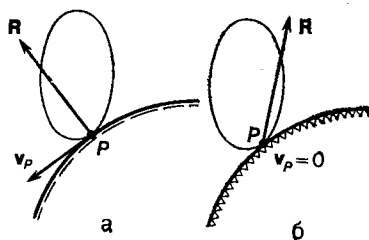


Рис. 22. Сила реакции при скольжении по гладкой поверхности (а) и при качении по абсолютно шероховатой (б). Здесь мы имеем идеальные связи. Учет неидеальности может производиться введением вязкого трения в первом случае и трения качения во втором

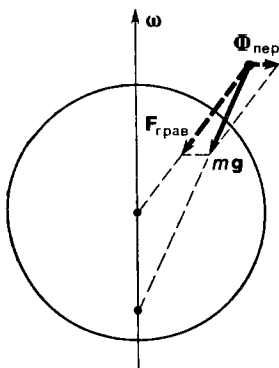


Рис. 23. Гравитационная и инерционная составляющие силы тяжести

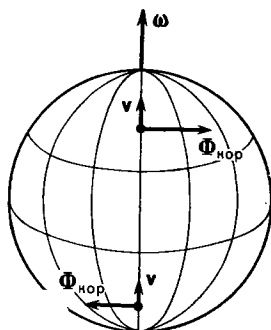


Рис. 24. Сила Кориолиса для точки, движущейся по меридиану

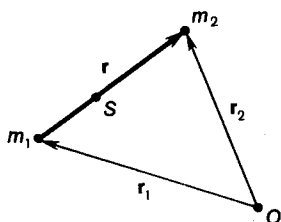


Рис. 25. Классическая задача двух тел. Рассматривается система из двух материальных точек, притягивающихся по закону обратных квадратов; силы притяжения равны (по модулю) и направлены от точки к точке: выполняется третий закон Ньютона. Система замкнута и, более того, галилеево инвариантна. Использование интегралов движения позволяет описать орбиты точек: относительно центра масс или относительно друг друга (в системах координат с невращающимися осями) точки движутся по коническим сечениям

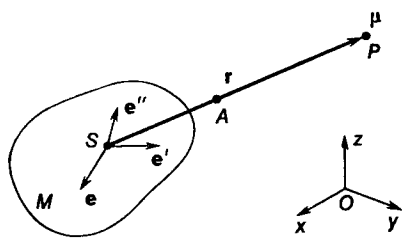


Рис. 26. Система «тело—точка» при гравитационном взаимодействии также замкнута и даже галилеево инвариантна. Но при наличии тех же, что и в классической задаче, интегралов импульса, момента и энергии у нее число степеней свободы на три больше (добавляется вращение тела). Воздействие точки на тело приводится к силе, приложенной в его центре масс (эта сила, вообще говоря, не направлена на точку), и моменту, задающему вращение тела относительно центра масс. Сила и момент вычисляются в главных центральных осях тела и зависят только от местонахождения точки относительно них

Л

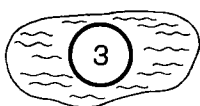


Рис. 27. Приливной эффект в океане

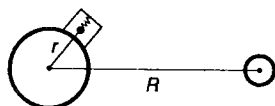


Рис. 28. Модельная задача для первоначального объяснения приливного эффекта

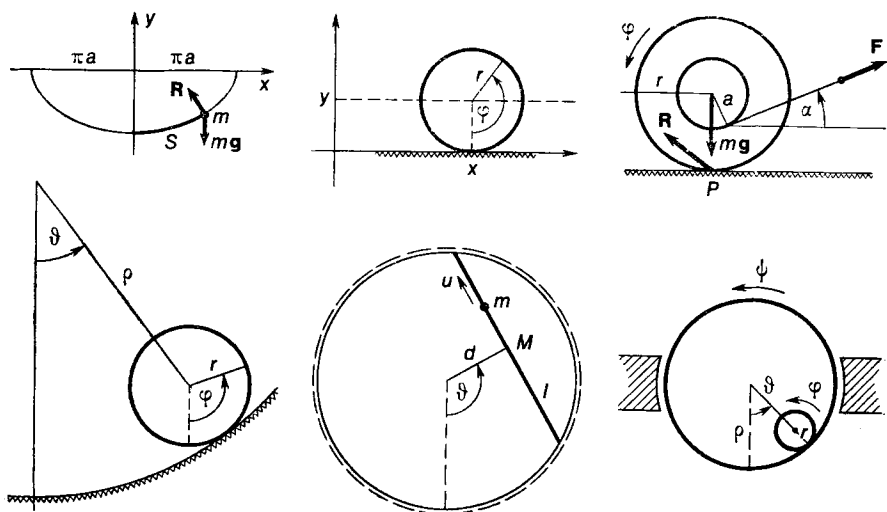


Рис. 29—34. Иллюстрации к некоторым задачам

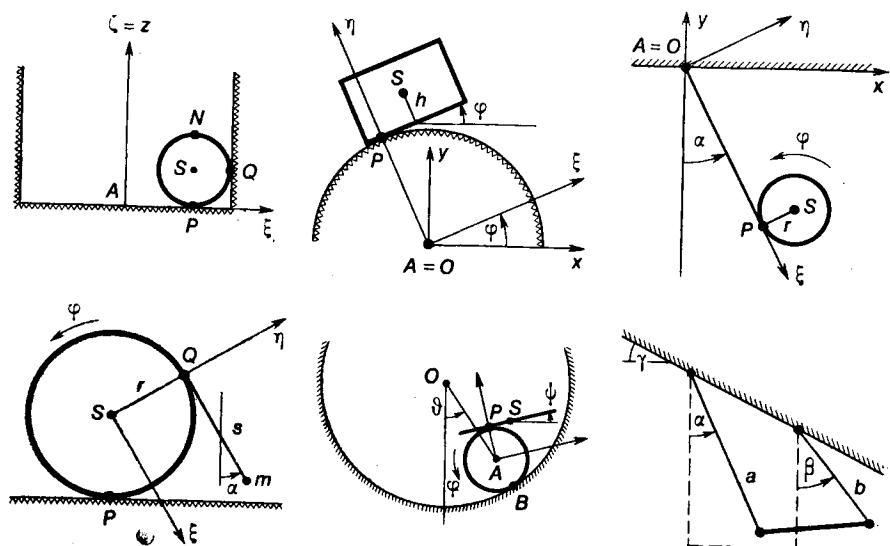


Рис. 35—40. Иллюстрации к Принципу явно важных точек

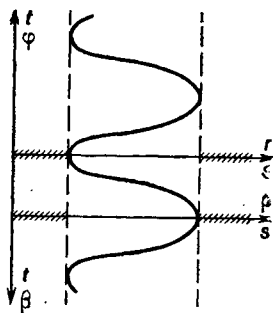


Рис. 41. Объединение однотипных иллюстраций к различным разделам курса: 1) колебательное движение одномерной консервативной системы «в потенциальной яме»; 2) этапы построения траекторий и решения уравнений движения в центральном поле сил; 3) зависимость одной из постоянных интегрирования от определяющей координаты при применении метода Гамильтона—Якоби. Аналогичные многозначные зависимости можно указать и в других случаях

Объяснение. Решение многих задач механики упирается в интегрирование дифференциального уравнения вида

$$d(\text{верт.}) = \pm \frac{d(\text{горизонт.})}{\sqrt{\quad}},$$

причем подкоренное выражение неотрицательно на некотором отрезке. Появление корня в конечном счете всегда связано с тем, что в выражении кинетической энергии скорость стоит в квадрате

Рис. 42. Области возможности движения натуральной системы с одной степенью свободы распадаются на несколько связанных частей типа отрезка или полупрямой; отрезку отвечают колебательные (см. рис. 41) и иногда асимптотические движения к неустойчивым положениям равновесия. Иногда происходят перестройки о. в. д. (с ростом h связанные части могут сливаться либо рождаться «на пустом месте»), когда h пересекает критическое значение потенциальной энергии. Если соответствующая критическая точка (положение равновесия) не вырождена, то перестройка обязательна

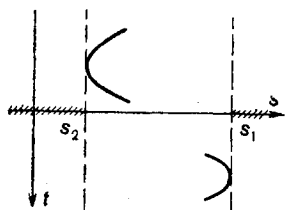
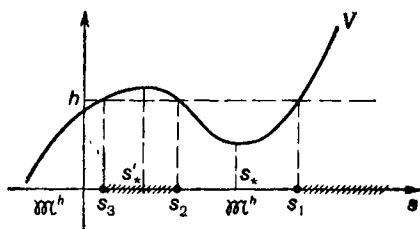
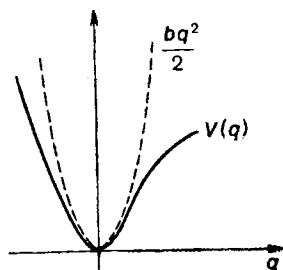


Рис. 43. Движение в окрестности точек остановки практически равноускоренное (т. е. график функции $s(t)$ в окрестности точек экстремума хорошо аппроксимируется параболой, изображающей разложение в ряд Тейлора с точностью до членов третьего порядка малости)

Рис. 44. Линеаризация одномерной консервативной системы в окрестности равновесия использует замену потенциала квадратичными членами его тейлоровского разложения (снова замена функции некоторой параболой, но в других обстоятельствах). Изображено устойчивое равновесие; для неустойчивого рисунка надо перевернуть



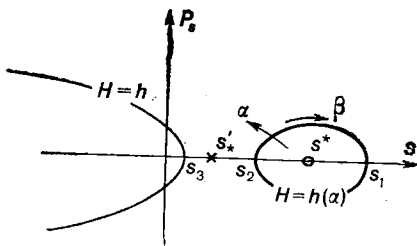


Рис. 45. Уровень энергии в фазовом пространстве, отвечающий области возможности движения на рис. 42. Легко видеть, что эта область может рассматриваться как проекция уровня на ось s ; потенциальной яме (связной части типа отрезка) отвечает замкнутая кривая на фазовой плоскости

Примечания. 1) Внутри замкнутой кривой находится устойчивое состояние равновесия. При линейизации системы в его окрестности эта кривая аппроксимируется эллипсом (ср. с рис. 72). 2) Изображен также характер изменения произвольных постоянных (α и β), получающихся при применении метода Гамильтона — Якоби. 3) Неустойчивое состояние равновесия помечено крестиком; оно располагается на оси s между связными компонентами уровня энергии. С ростом h эти компоненты приблизятся справа и слева к указанному равновесию, и в его окрестности будут идти примерно по гиперболам (ср. с рис. 73). После того как h пересечет критическое значение, уровень энергии станет связным, но поначалу будет иметь тонкую перемычку, проходящую сверху и снизу от состояния равновесия, приблизительно опять-таки по гиперболам (снова см. рис. 73).

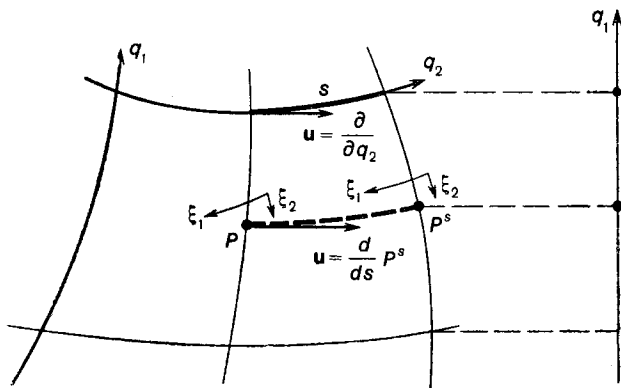


Рис. 46. Симметрия. На многообразии положений классической натуральной системы (изображен случай двух степеней свободы, например точка на поверхности) действует семейство отображений $P \mapsto P^s$ (возьмем, как принято, группу, хотя это и не обязательно), обладающее тем свойством, что в любой «сопутствующей», «увлекаемой» системе координат ξ_1, ξ_2 выражение лагранжиана получается одним и тем же. Тогда имеет место интеграл движения, представимый в виде скалярного произведения (в метрике многообразия положений, задаваемой квадратичной по скоростям частью лагранжиана) вектора скорости с порождающим группой векторным полем u . Особенно просто отображения симметрии выглядят в системе координат q_1, q_2 , из которых одна — циклическая: тогда соответствующие координатные линии являются интегральными для порождающего поля, а отображения представляются сдвигами вдоль этих линий. Таким образом, понятие симметрии есть инвариантная (не зависящая от выбора координат) переформулировка наличия циклической координаты. Исключение этой координаты из рассмотрения по Раусу (переход к правой части рисунка) на инвариантном языке начинается с факторизации — перехода к новому многообразию меньшей размерности, каждой точке которого отвечает целая траектория группы симметрий многообразия положений

Примечание. Можно сказать, что система с двумя степенями свободы, обладающая симметрией, интегрируема потому, что исключение игнорируемой координаты приводит к системе с одной степенью свободы, интегрируемой всегда. Обобщая, можно утверждать даже большее: все интегрируемые задачи классической динамики (по крайней мере динамики системы точек, чтобы оставить в стороне более абстрактные конструкции) сводятся к одной или нескольким системам с одной степенью свободы

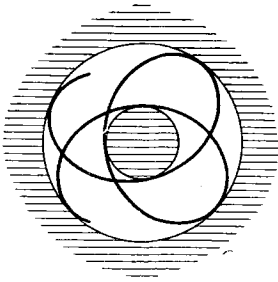


Рис. 47. Качественная иллюстрация ко многим интегрируемым задачам динамики, в частности: 1) типичные траектории в центральном поле сил (аналогичные, но внешне несколько иные варианты см. на рис. 52 и 62); 2) траектория сферического маятника в проекции на горизонтальную плоскость, если вся траектория лежит ниже экватора; 3) герполоиды в представлении Пуансо (полодни см. на рис. 74)

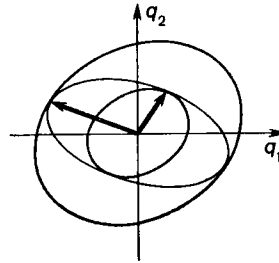
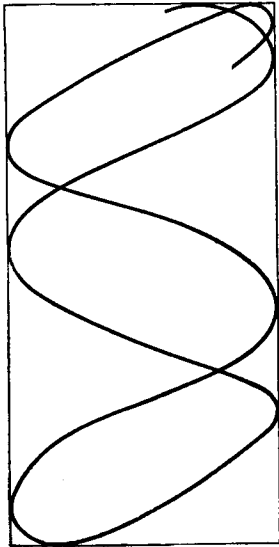


Рис. 48. Геометрический смысл нормальных колебаний: они направлены в точки касания эллипсоида $q \cdot Aq = 1$ (A — матрица коэффициентов кинетической энергии) с эллипсоидами из семейства $q \cdot Bq = \text{const}$ (B — матрица Гесса потенциальной энергии). Изображен весьма часто встречающийся случай с двумя степенями свободы: в первом из нормальных колебаний обе определяющие координаты растут и убывают одновременно, во втором — изменяются в противоположные стороны

Рис. 49. Еще один образ, характерный для многих интегрируемых систем: 1) эскиз траектории бигармонического осциллятора ($\omega_1 \approx 3\omega_2$); 2) движение в окрестности положения равновесия в первом приближении, представленное в нормальных координатах; 3) типичная траектория лиувиллевой системы в двухпараметрической области возможности движения типа прямоугольника (только этот прямоугольник обычно бывает криволинейным, так что рисунок надо несколько деформировать)

Продолжение примечания с предыдущей страницы. Движение лиувиллевой системы (рис. 49) в проекции на каждую координатную ось имеет такой же колебательный характер, как движение в потенциальной яме (рис. 41). Таким образом, лиувиллева система сводится к двум системам с одной степенью свободы (но эти системы зависят, вообще говоря, от полной энергии исходной системы как от параметра, так что здесь нет такого тривиального распада системы на одномерные, какое наблюдается при линеаризации после перехода к нормальным координатам; иначе говоря, лиувиллева система в общем случае не является «прямым произведением» одномерных). Наконец, представление Пуансо (см. рис. 66) тоже можно рассматривать как сведение случая Эйлера к (не натуральной) гамильтоновой системе с одной степенью свободы (см. рис. 74).

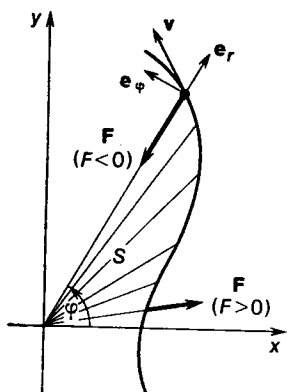


Рис. 50. Центральное поле сил и полярные координаты

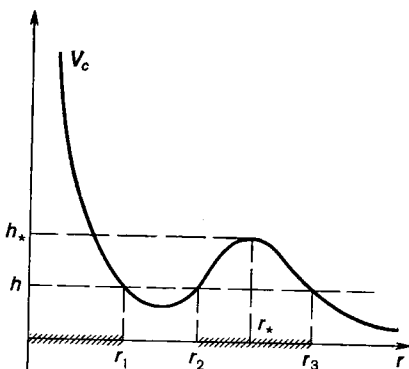


Рис. 51. Приведенный потенциал и зоны допустимых значений полярного радиуса

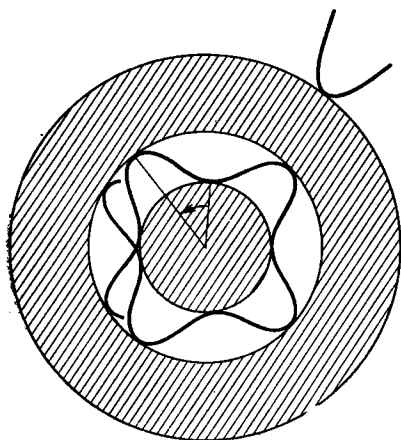


Рис. 52. Области возможности движения и поведение траекторий в них для движения в центральном поле сил

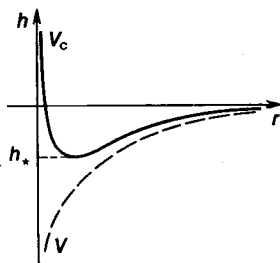


Рис. 53. Потенциал и приведенный потенциал в задаче Кеплера

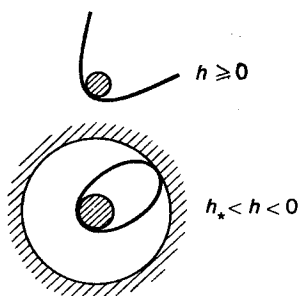


Рис. 54. Расположение траекторий в области возможности движения для задачи Кеплера

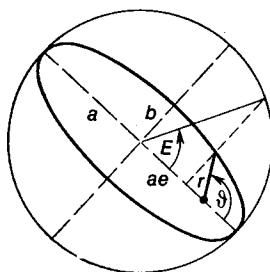


Рис. 55. Геометрические характеристики эллиптической траектории, истинная и эксцентрическая аномалии

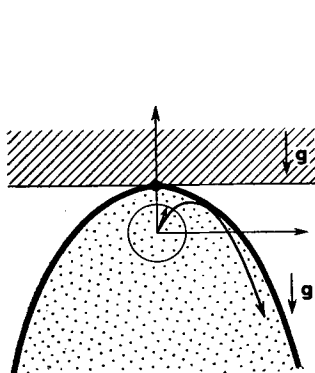


Рис. 56. Множество достижимости для движения в поле тяжести. Его границная кривая называется параболой безопасности

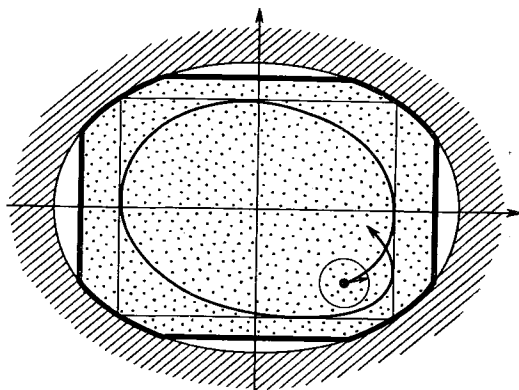


Рис. 57. Множество достижимости для бигармонического осциллятора. Аналогичное построение возможно в любой лиувиллевой системе общего вида

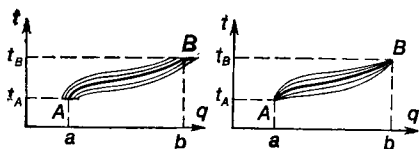


Рис. 58. Произвольная вариация кривой в расширенном конфигурационном пространстве (а) и вариация с закрепленными концами (б)

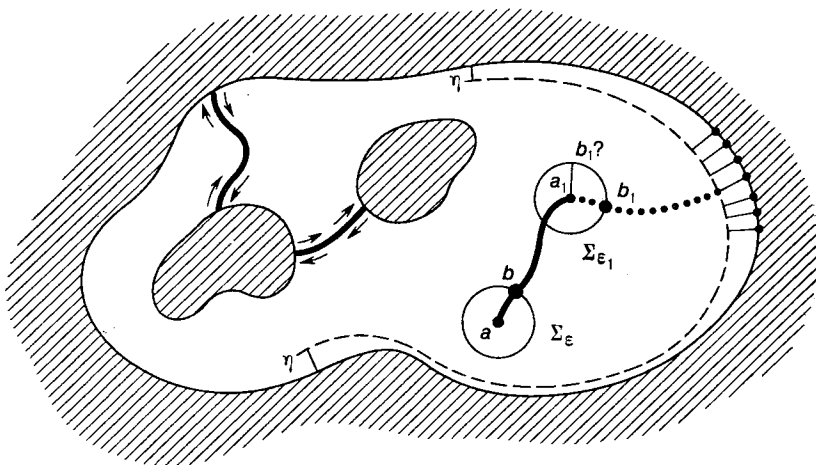


Рис. 59. Свойства геодезических метрик Якоби в области возможности движения с краем. Слева изображены две либрации — траектории периодических движений, переходящих с одной связной компоненты границы (из трех) на другую. Эти кривые имеют минимальную длину в классе всех кривых, соединяющих указанные компоненты границы (минимальная геодезическая для третьей пары связных компонент состоит из уже названных либраций и куска границы между ними — длина этого куска в метрике Якоби равна нулю). Справа изображена траектория, выходящая на границу из произвольной внутренней точки компактной области возможного движения. Такая траектория существует всегда. Существо доказательства в том, что траектория сначала доводится до некоторой окрестности границы такой, что все геодезические, выпущенные с границы, без самопересечения под прямым углом упираются в границу окрестности. Одна из этих геодезических встретит рассматриваемую траекторию под развернутым углом и потому послужит ее продолжением. Из рис. 57 вытекает, что даже в случае компактной области возможности движения две точки не всегда можно соединить геодезической метрики Якоби

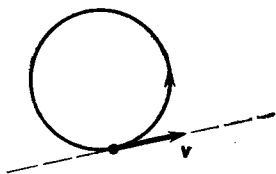


Рис. 60. Прямолинейное движение по инерции после наложения однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости, превращается в равномерное круговое движение: траектории как бы закручиваются в одну и ту же сторону. Влияние магнитного поля тем сильнее, чем больше величина скорости. В пространственной задаче дополнительно возможно равномерное смещение в направлении поля (или против него)

Рис. 61. Наложение магнитного поля не меняет области возможности движения с заданной энергией, а само движение может стать качественно иным. Здесь изображено, как вместо первоначального ухода в бесконечность траектория может так сильно закрутиться, что равновесие (в центре круга) из неустойчивого превратится в устойчивое (первый эффект Кельвина)

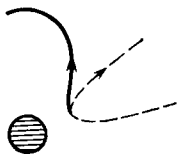


Рис. 62. Эффект Лармора: движение электрона в «атоме водорода» при наличии магнитного поля происходит как бы по вращающемуся эллипсу. Или (изображение явления другой природы): еще один вариант траектории в центральном поле

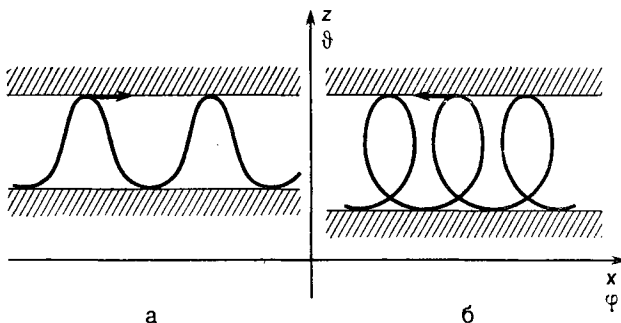
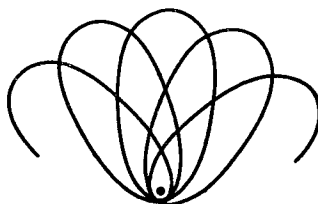


Рис. 63. Первое прочтение: два типа траекторий движения под действием силы тяжести (направленной вниз) при наличии магнитного поля, ортогонального плоскости (промежуточный вариант — траектория типа циклоиды). Наблюдается не падение, а дрейф. Левый рисунок, в отличие от правого, действителен лишь до тех пор, пока модуль начальной скорости не превосходит некоторого предела, при превышении которого траектория сразу пойдет вверх. Второе прочтение рисунка: изменение углов прецессии и нутации в случае Лагранжа. Причина качественного сходства траекторий в обеих задачах — наличие линейных по скоростям членов в функциях Лагранжа и Рауса соответственно

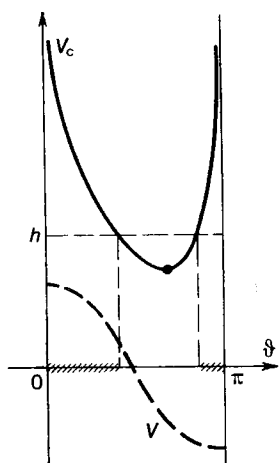


Рис. 64. Приведенный потенциал сферического маятника: после приведения по Раусу к потенциалу добавляется положительное слагаемое. Обобщением этой задачи (в некотором смысле) является волчок Лагранжа — Пуассона

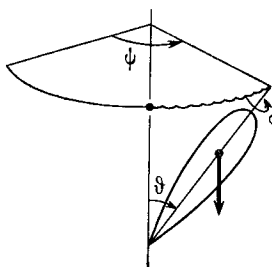


Рис. 65. Псевдорегулярная прецессия волчка Лагранжа — Пуассона: скорость собственного вращения φ велика и практически постоянна, угловая скорость прецессии ψ конечна и тоже почти постоянна, нутация (амплитуда изменения $\theta(t)$) мала. Наличие точки возврата на траектории оси симметрии связано с конкретным выбором начального состояния

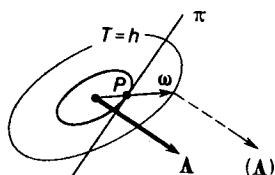


Рис. 66. Первое представление Пуансо: эллипсоид инерции катится по неподвижной плоскости. Ее положение зависит от начальных условий

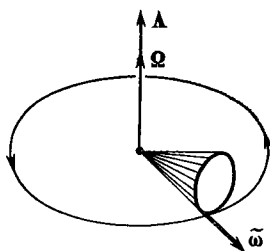


Рис. 67. Второе представление Пуансо: конус, связанный с телом, катится по вращающейся плоскости. Форма конуса и скорость вращения зависят от начальных условий

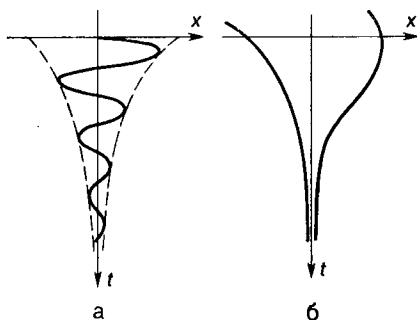


Рис. 68. Затухающие колебания и апериодический режим осциллятора с трением (слабым (а) и сильным (б) соответственно)

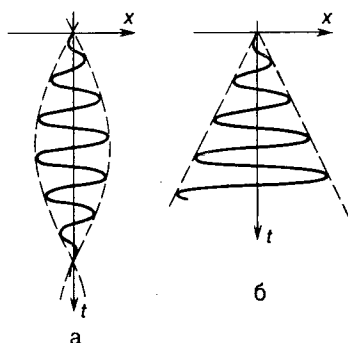


Рис. 69. Биеения и раскачка осциллятора под действием периодической силы (когда частота возбуждения приблизительно (а) и в точности (б) равна частоте осциллятора)

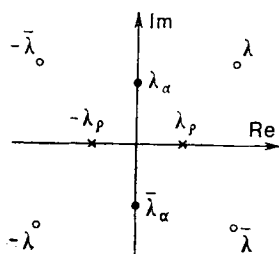


Рис. 70. Распределение собственных чисел линейной канонической системы

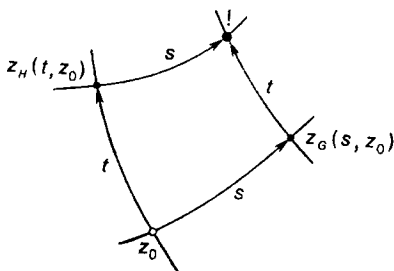


Рис. 71. Коммутирующие фазовые потоки

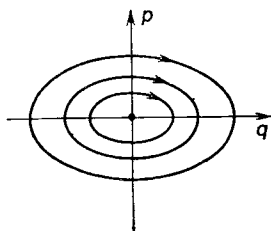


Рис. 72. Фазовый портрет линейной канонической системы эллиптического типа

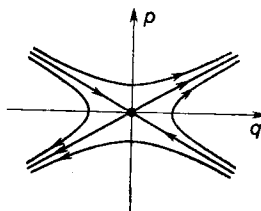


Рис. 73. Фазовый портрет линейной канонической системы гиперболического типа

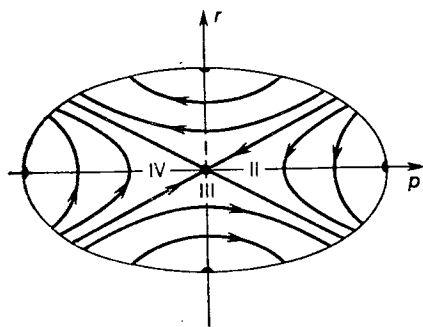
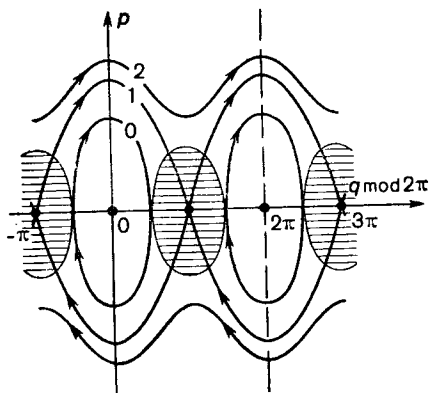


Рис. 75. Фазовый портрет математического маятника на плоскости. Изображены фазовые траектории колебательных, асимптотических и вращательных движений, указана зона отрицательной реакции связи. Видны состояния равновесия, в линейном приближении имеющие эллиптический и гиперболический типы (особые точки типа «центр» и «седло»)

Рис. 74. Полоиды на эллипсоиде инерции в представлении Пуансо, а также поток, задаваемый уравнениями Эйлера на уровне энергии. Видны особые точки типа «центр» и «седло». Ассоциация с предыдущими двумя рисунками не случайна: этот поток можно представить как гамильтонов



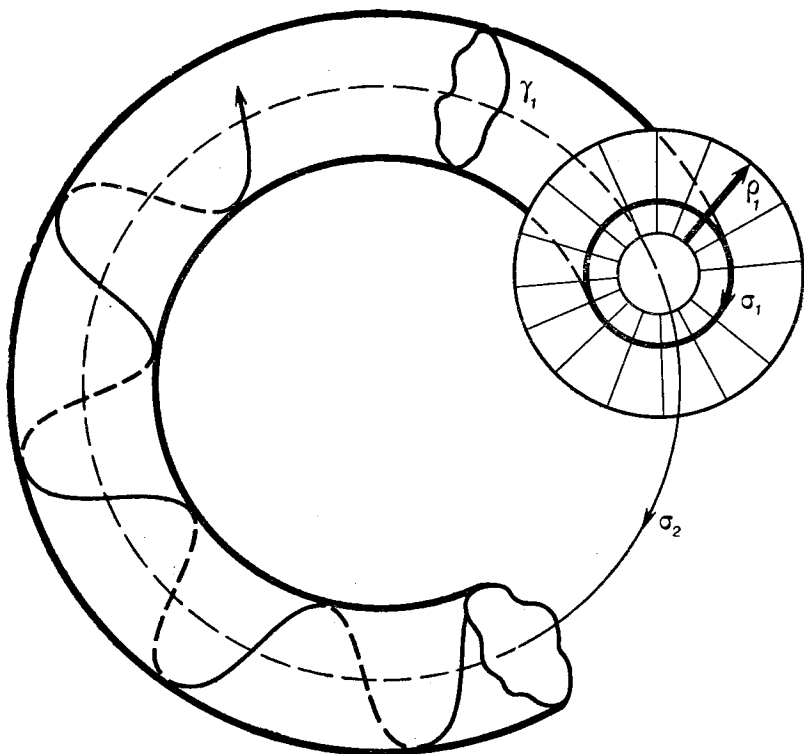


Рис. 76. Расслоение на фазовые торы, переменные действие—угол (на уровне $\rho_2 = \text{const}$) и фазовые траектории (обмотки тора) интегрируемых систем. Если в фазовом пространстве поведение их однообразно, то на многообразии положений — весьма разнообразно ввиду того, что фазовые торы и их обмотки могут по-разному проектироваться на это многообразие (ср. с рис. 52, 47, 62, 63, 49)

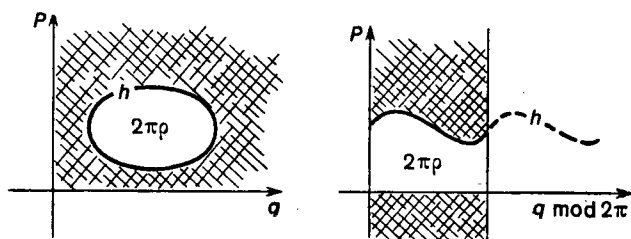


Рис. 77. Наглядный смысл переменной «действие» в системе с одной степенью свободы (два варианта, ср. с рис. 75)

Ограниченная задача трех тел: классический пример неинтегрируемой задачи
(неинтегрируемость доказана Пуанкаре)

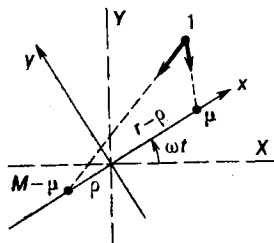


Рис. 78. Подвижная система координат

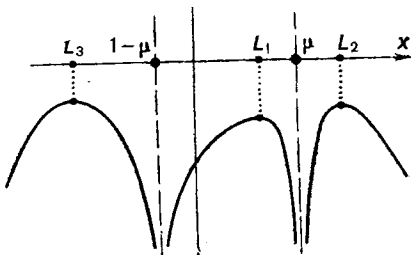


Рис. 79. График суммарной потенциальной энергии на оси x

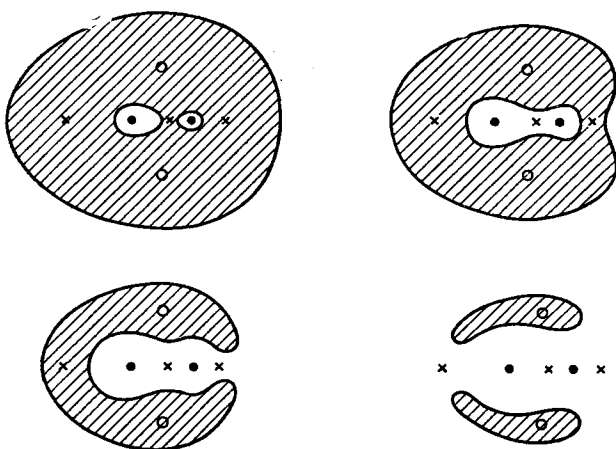


Рис. 80. Области Хилла с ростом постоянной интеграла Якоби (заштрихованное отбрасывается). Указаны также точки либрации, в которых происходят перестройки областей Хилла. Из них устойчивыми могут быть только треугольные точки либрации; в первом приближении устойчивость объясняется эффектом Кельвина (см. рис. 61)

ЛИТЕРАТУРА *

А. Классические труды

Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — В кн.: Крылов А. Н. Собр. соч., т. 7. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

Лагранж Ж.-Л. Аналитическая механика, т. 1—2. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.

Якоби К. Лекции по динамике. — М.—Л.: ОНТИ, 1936.

Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. — В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды, т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.

Картан Э. Интегральные инварианты. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1940.

Б. Рекомендуемые учебники

— к обеим частям книги:

Аппель П. Теоретическая механика**, т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1960.

Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.

Уиттекер Е. Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.

Лич Дж. У. Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961.

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.

Синг Дж. Л. Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963.

— специально к первой части:

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, т. 1, 2, 5, 6. — М.: Мир, 1977.

Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Беркелевский курс физики, т. 1. Механика. — М.: Наука, 1975.

Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. — М.: Наука, 1970.

Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. — М.: Наука, 1979.

— специально ко второй части:

Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. — М.: Наука, 1967.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.

Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

В. Дополнительная литература

Лаплас П. С. Изложение системы мира. — Л.: Наука, 1982.

Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.

Биркгоф Г. Д. Динамические системы. — М.—Л.: Гостехиздат, 1941.

* Библиография каждого раздела упорядочена хронологически соответствующим первым изданиям.

** Следует отметить, что термин «теоретическая механика» (по мнению автора, неудачный хотя бы потому, что механика сплошной среды — не менее «теоретическая») в заглавии трактатов Аппеля и Суслова не является авторским; то же касается и трактатов Валле Пуссена, Леви-Чивита и Амальди, Ламба, которые студенту менее доступны — в разных смыслах этого слова — и потому не включены в список литературы.

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.

Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.

Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965.

Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953.

Зигель К. Лекции по небесной механике. — М.: ИЛ, 1959.

Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли, вып. 8. — М.: 1961.

Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.

Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. — М.: Наука, 1983.

Алексеев В. М. Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. — Бюлл. ИТА, 1965, т. 10, вып. 4, 1965.

Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неавтономных систем. — М.: Наука, 1967.

Охоцимский Д. Е. Динамика космических полетов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968.

Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. — М.: Наука, 1968.

Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия «в целом». — М.: Мир, 1971.

Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.

Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974.

Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.

Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. — УМН, 1981, т. 36, вып. 4.

Смейл С. Топология и механика. — УМН, 1972, т. 27, вып. 2.

Нехорошев Н. Н. Переменные действие — угол и их обобщение. — В кн.: Труды Моск. матем. общества, т. 26. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.

Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978.

Абалакин В. К. Основы эфемеридной астрономии. — М.: Наука, 1979.

Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. — УМН, 1981, т. 36, вып. 5.

Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. — УМН, 1982, т. 37, вып. 6.

Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

Г. Научно-популярная литература

Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Наука, 1978.

Бишоп Р. Колебания. — М.: Наука, 1979.

Демин В. Г. Судьба солнечной системы. — М.: Наука, 1975.

Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, 1978.

Самсонов В. А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980.